UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

SUPLETORIO DEL SEGUNDO PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL

1. (10 puntos)

   Calcule la distancia mínima del punto $(1,2,5)$ al plano que pasa por los puntos $(2,1,3)$, $(1,5,-1)$ y $(3,0,5)$.

2. (9 puntos)

   (a) Sea $V=\mathbb{R}$. Definimos $u\oplus v=2u-v$ y $c\odot u=cu$. ¿Es V un espacio vectorial?

   (b) Determine si el subconjunto de todas las matrices de $n\times n$ cuyo determinante es uno, es un subespacio de M_{nn}.

   (c) Determine si el subconjunto de todos los polinomios de la forma at^2+bt+c donde $a+b=c$, es un subespacio de P_2.

3. (8 puntos)

   Escriba una base para el subespacio W de M_{33} formado por todas las matrices simétricas.

4. (8 puntos)

   Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine el rango y la nulidad de A.

   (b) Escriba una base del espacio nulo asociado a la matriz A y determine a que espacio vectorial corresponde.

5. (15 puntos)

Demuestre las proposiciones siguientes:

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Demuestre que si $\dim V = n$, entonces cualesquira $n+1$ vectores en V son linealmente dependientes.

(c) Sean v_1, v_2 y v_3 vectores en un espacio vectorial, tales que $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente. Muestre que si v_3 no pertenece a $gen\{v_1, v_2\}$, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.