ALGEBRA LINEAL.
PRIMER EXAMEN PARCIAL.
Grupo 13

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ____ CODIGO _________________

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

   (a) (12 ptos) Encuentre la solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, si existe.

   (b) (6 ptos) Calcule el $\det(A)$. ¿Es A una matriz singular o no singular?

2. (20 ptos) Considere los vectores $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ y el vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

   (a) Calcule $||\boldsymbol{u}||$, $||\boldsymbol{v}||$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

   (b) Halle la ecuación del plano π perpendicular al vector $\boldsymbol{v}$, que pase por un punto cualquiera del plano $x + y + z = 1$.

   (c) Halle la ecuación de una recta ℓ paralela al plano $\Pi : 2x + 3y + z + 8 = 0$ y que contenga al punto $P(1, 0, -4)$.

   (d) Calcule la distancia de la recta ℓ al plano Π.

3. (12 ptos) Para cada uno de los siguientes enunciados determine su valor de verdad, y argumente en cada caso su respuesta:

   (a) Sea $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, entonces $X^2 + 4X = I_2$.

   (b) Considere el sistema

   $$\begin{aligned} x + y - \quad z &= 3 \\ y + \quad 6z &= \lambda \\ (\lambda^2 - 4)z &= \lambda + 4 \end{aligned}$$

   entonces los valores de λ para los cuales el sistema tiene única solución son los $\lambda \neq 2$ y para que no tenga solución es $\lambda = -4$.

   (c) Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Si $||\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{u}||^2 = ||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2$ entonces el vector $\boldsymbol{u}$ es ortogonal al vector $\boldsymbol{v}$.

   (d) Sea A una matriz orden 4×4 y suponga que el vector $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, es una solución del sistema $A\boldsymbol{x} = 0$, entonces $\det(A) = 0$.

4. (Opcional 8 ptos) Suponga que A, B, y $A+B$ son matrices no singulares $n \times n$, entonces $A^{-1} + B^{-1}$ es no singular y $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.