

MODELO DE EXPANSION
DE UN SECTOR PRODUCTIVO

Por: ALBERTO LEON BETANCOURT, Ph.D.

PUBLICACION

No. 4

Cali, Octubre de 1980

INSTITUTO COLOMBIANO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE INCOLDA

— I C E S I —

El autor de este artículo, Alberto León Betancourt, es Ingeniero Civil de la Universidad Nacional de Colombia, M.Sc. en Ingeniería Industrial de The University of Michigan y Ph.D. en Ingeniería de Sistemas de la misma Universidad. Ha sido Rector de la Universidad del Valle, Presidente del Banco Popular y en la actualidad es Director Ejecutivo de INCOLDA-Centro de Desarrollo del Valle del Cauca y Rector del Instituto Colombiano de Estudios Superiores de INCOLDA - ICESI. Es profesor del ICESI y de INCOLDA en las áreas de Matemáticas y Operaciones - Investigación de Operaciones, Sistemas y Producción - y de Finanzas, Información y Control - Administración y Evaluación de Proyectos.

El autor es responsable por las opiniones expresadas.

El material de este escrito puede ser reproducido sin autorización si se menciona su autor, su título y como fuente "Publicaciones del ICESI".

LOS EDITORES

Cali, Octubre de 1980

CONTENIDO

1. RESUMEN
2. PRESENTACION GENERAL
 - 2.1 Criterio de Decisión
 - 2.2 Objetivo del Estudio
 - 2.3 Metodología General
 - 2.4 Comentarios Adicionales
3. FORMULACION DEL MODELO
 - 3.1 Restricciones del Sistema
 - 3.2 Los Optimos Condicionales
 - 3.3 El Método de Cálculo
 - 3.4 El Procesamiento
 - 3.5 El Optimo Global
4. CONCLUSIONES

1. RESUMEN

Se desarrolla en este escrito un Modelo de Expansión de un Sector Productivo* que permite definir la mejor estrategia para satisfacer la demanda tratando de minimizar los costos totales asociados con la producción incluyendo en ellos también todos los costos de transporte. O, en otras palabras, maximizando la eficiencia en términos nacionales.

Todo sector productivo se caracteriza por la existencia de varias fuentes potenciales para satisfacer la demanda. El Modelo que se presenta aquí considera tres fuentes principales: producción nacional a partir de materia prima nacional, producción nacional a partir de productos semimanufacturados importados e importación del producto terminado.

En un primer paso, y mediante la utilización de **Programación Lineal**, se optimiza la gestión de varias estructuras productivas (definidas por cierta capacidad industrial instalada en puntos geográficos precisos). Se obtiene así una serie de estados posibles para cada uno de los años del período considerado en el análisis, a cada uno de los cuales aparece asociado un costo anual para satisfacer la demanda correspondiente. Posteriormente, se evalúan las diferentes secuencias posibles de esos estados usando para ello como función objetiva, que se espera minimizar, el costo total actualizado (valor presente) para todo el período.

Por el enfoque mismo del problema, los costos que se consideran son precios de cuenta obtenidos directamente o introduciendo correcciones a los precios del mercado.

Como resultado final se obtienen no solo las inversiones sino también la gestión óptima del sistema: niveles de producción en cada una de las unidades industriales, políticas de abastecimiento de materias primas y distribución del producto para cada uno de los años del período total analizado.

2. PRESENTACION GENERAL

Se entiende en este escrito por **SECTOR PRODUCTIVO** el conjunto de agentes económicos (personas, instituciones, instalaciones o equipo en general) necesarios para la producción y consumo de un determinado producto.

* Este estudio se realizó por primera vez cuando su autor era Decano de la División de Ingeniería de la Universidad del Valle.

En el proceso de producción de un artículo, al menos en este trabajo, pueden distinguirse las siguientes alternativas:

- a) Adquirir en el país la materia prima, producir con ella una serie de partes semimanufacturadas y posteriormente con éstas elaborar el producto final que será entregado al consumidor.

En este caso, el valor agregado que queda en el país es el máximo posible pero las inversiones en equipo son, al mismo tiempo, las mayores en valor.

- b) Importar las partes semimanufacturadas y llevar a cabo en el país la elaboración del producto final.

El valor agregado que queda en el país con esta alternativa es inferior al de la anterior pero, a la vez, las inversiones necesarias son menores ahorrándose todo el equipo requerido para la elaboración de los subproductos.

- c) Importar el producto terminado.

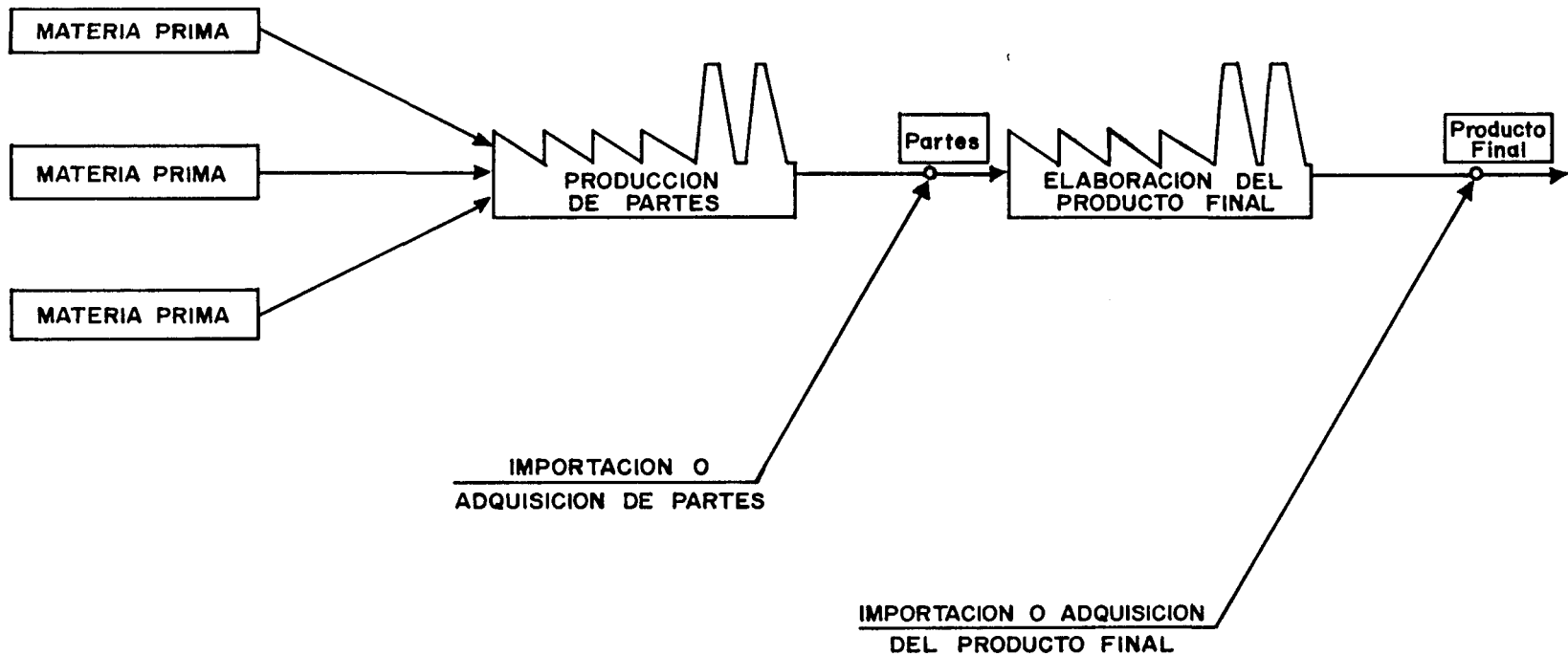
En este caso el valor agregado que queda en el país es despreciable, de quedar alguno, y las inversiones necesarias son nulas o insignificantes, ya que corresponden únicamente a operaciones de almacenamiento y/o envase.

El esquema que caracteriza las alternativas enumeradas puede apreciarse en la Figura No. 1.

La participación de cada una de estas alternativas en el consumo total, así como el volumen de ese consumo, varían a lo largo de la escala de tiempo y por ello parece razonable estudiar las alternativas frente a un mayor consumo global debido a crecimiento en la población y a eventuales aumentos en el consumo per cápita.

2.1 Criterio de Decisión

Dado el gran número de alternativas posibles resulta evidente la necesidad de definir algún criterio que permita compararlas en el mismo plano de igualdad para orientar así la decisión. Se toma aquí como criterio de decisión el de máxima eficiencia en términos nacionales. En otras palabras, la solución que se obtenga garantizará la máxima eficiencia global lo cual no indica, necesariamente, la mejor situación para cada uno de los centros



ESQUEMA PRODUCTIVO
Figura No. 1

de producción o empresas concurrentes consideradas individualmente. Parece claro que debe estar presente aquí la metodología propia del **ANALISIS DE SISTEMAS**.

Establecido el criterio en términos generales parece necesario definirlo con mayor precisión.

En el esquema de trabajo seguido se identifica la eficiencia para la comunidad como el beneficio para la misma. El beneficio bruto podría definirse como la satisfacción lograda por los clientes al consumir el producto, beneficio al cual debe descontarse el costo en que incurre la comunidad al producir este producto, para obtener así el beneficio neto.

No son ocultables las dificultades para medir el beneficio bruto (satisfacción de los consumidores), especialmente porque el precio de muchos productos no es el resultado del libre juego de la oferta y la demanda. Se ha tratado de obviar este problema planteándolo en términos de la búsqueda del costo mínimo que la comunidad puede soportar para satisfacer una demanda dada.

Aún cuando, para una demanda dada, el segundo criterio puede coincidir con el máximo beneficio neto no son estrictamente equivalentes. En efecto, en el segundo caso es indispensable considerar el volumen de la demanda como una variable exógena con lo cual se hace rígida, inmediatamente, una parte del sector productivo.

2.2 Objetivo del Estudio

El objetivo perseguido es poder definir un sistema de producción eficiente en términos nacionales. Este sistema de producción quedará definido por los volúmenes del mercado consumidor servidos por cada una de las alternativas mencionadas anteriormente así como también las inversiones, los volúmenes de producción, las políticas de abastecimiento de materias primas y de distribución del producto terminado para cada uno de los centros de producción. El resultado del estudio será, en otras palabras, una cuantificación de diferentes estructuras productivas que evolucionarán dentro del período de tiempo que se desee analizar.

Es indudable, por otra parte, que cuando el horizonte del análisis se aleje (un período más largo) la probabilidad de que la situación proyectada coincida con la realidad será cada vez menor. En consecuencia, el resultado no deberá ser interpretado como una respuesta infalible para todo el período bajo análisis sino, más bien, como una incursión

hacia el futuro con cierto grado de incertidumbre.

El comentario anterior no invalida un estudio de esta clase. Si bien es cierto que la respuesta correspondiente a los últimos períodos del análisis estará afectada por errores y por factores imprevistos, no es menos cierto que las soluciones que se obtengan a corto plazo no estarán sujetas a esos mismos problemas. Parecería natural preguntar en este momento: por qué utilizar para definir políticas a corto plazo un sistema que, en cierta forma, está diseñado para formularlas a largo y mediano plazo?

La respuesta es simple: si un estudio se limitara al análisis de la situación presente se estaría aceptando la hipótesis de que las características de las situaciones futuras (precios sociales, disponibilidad de materias primas, demanda, etc.) irían a ser idénticas a las actuales, al menos durante la vida útil —vida económica— del proyecto. Dado que esa hipótesis no es válida, salvo en casos muy especiales y escasos, se estaría desconociendo la incidencia que las decisiones presentes tienen sobre situaciones futuras.

Un empleo periódico del modelo permitirá ajustar sus primeras soluciones a la situación real y lograr así, en forma iterativa, una mejor adecuación del sector productivo a los intereses del país.

2.3 Metodología General

El funcionamiento anual de la estructura de un **SECTOR PRODUCTIVO**, puede representarse muy bien con la ayuda de un **MODELO DE PROGRAMACION LINEAL** del tipo de **TRANSPORTE CON TRANSBORDO**. Se utilizó un modelo de esta clase para evaluar el funcionamiento de diversas estructuras de producción a lo largo de la escala de tiempo y para seleccionar la óptima de todas ellas.

El método permite encontrar no sólo la mejor alternativa sino también hacer una comparación cuantitativa de todas aquellas que se desee tener en cuenta lo cual representa, es claro, una enorme ventaja sobre los modelos de programación lineal pura.

En la evaluación de las alternativas, tal como se señaló al definir el criterio decisorio, se considera el costo nacional, o social, en que se incurre al abastecer el país con una cierta estructura productiva.

Como el análisis se hace a todo lo largo de un período de tiempo es indispensable dis-

poner de un método que permita hacer comparaciones entre cantidades (costos, en este caso) que aparecen en momentos diferentes sobre la escala de tiempo. Para ello se utiliza el concepto del **VALOR PRESENTE**, o de **ACTUALIZACION**, y entonces el indicador empleado para evaluar cada alternativa es el **VALOR PRESENTE DEL COSTO SOCIAL - COSTO SOCIAL ACTUALIZADO** - para el período de interés.

La única objeción teórica que podría hacerse al método expuesto es que la solución óptima se obtendría únicamente cuando ella esté incluida dentro del conjunto de alternativas estudiadas. En efecto, si el modelo se limita a evaluar las alternativas propuestas es evidente que la solución será la mejor del conjunto propuesto y nunca podrá ser la óptima absoluta si ésta no forma parte de ese conjunto.

Sin embargo, y aun cuando la objeción es válida en términos teóricos, en la práctica se disminuiría su importancia si quienes proponen las alternativas tienen un conocimiento profundo y claro del sector productivo.

2.4 Algunos Comentarios Adicionales

El modelo es general y puede usarse en ámbitos más pequeños. Es decir, que no es exclusivo para la nación; lo que aquí se ha venido llamando **el país** podría perfectamente bien ser o un departamento o una ciudad o el área geográfica dentro de la cual se distribuya el producto final.

Tal como se aprecia en la Figura No. 1, las materias primas pueden ser de varias clases pero, eso sí, a partir de las cuales puedan producirse las mismas partes semimanufacturadas y/o el mismo producto final. No es tampoco indispensable que se trate de partes semimanufacturadas solamente. Puede considerarse un proceso de transformación química en el cual se tuvieran unas materias primas de las cuales se extrajera un primer producto bruto para ser sometido luego, por ejemplo, a un proceso de purificación para obtener así el producto final. Lo que sí sería indispensable es que el primer producto bruto —resultado del primer proceso— pudiera adquirirse también en el comercio para alimentar el segundo paso.

Los pasos intermedios del proceso de conversión —de materia prima a producto final— no tienen que ser dos como aparece en la Figura No. 1. Pueden ser muchos y no es indispensable que cada uno de ellos tenga que ser alimentado con productos semimanufacturados adquiridos en el comercio; unos pueden serlo y otros no. Pero eso sí, y en un todo

de acuerdo con el comentario del párrafo anterior, las características físicas y químicas del producto adquirido en el comercio deben ser idénticas a aquellas con las cuales sale el producto del paso inmediatamente anterior en la línea de producción. Lo anterior es perfectamente claro pero, es también solucionable, agregando una etapa más al proceso y/o, según el caso, alejando dentro de la línea de producción el punto en el cual ingresan los elementos comprados.

3. FORMULACION GENERAL DEL MODELO

Dentro de cada **SECTOR PRODUCTIVO** pueden distinguirse, a su vez, tres componentes, llamados de aquí en adelante subsectores y que es necesario distinguir para que el resto de la presentación quede clara:

- a) El **SUBSECTOR DE MATERIAS PRIMAS** o conjunto de actividades necesarias para la obtención o importación de las materias primas.

El producto final cuando es importado puede considerarse como materia prima si requiere almacenamiento o envase en el país.

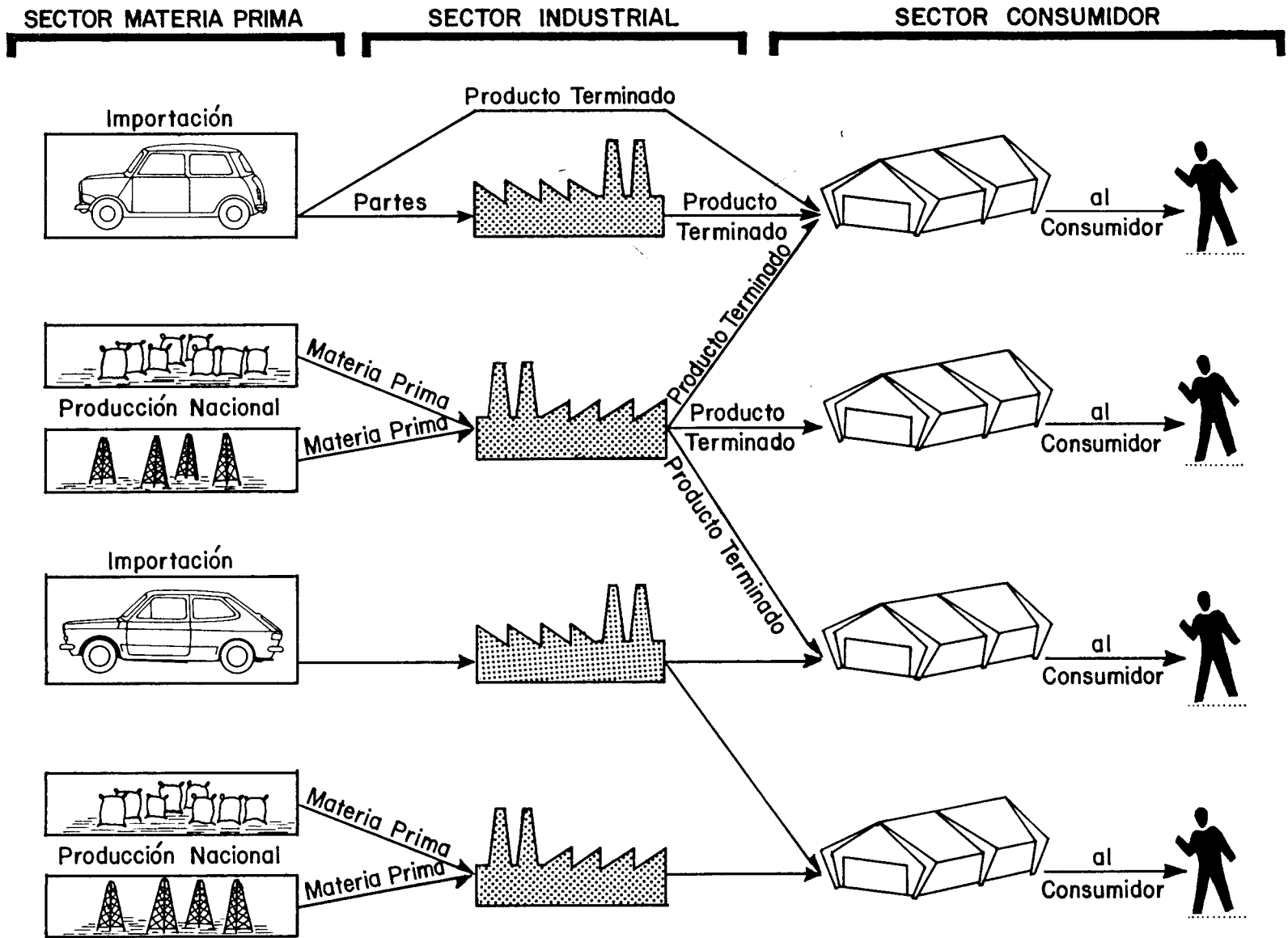
- b) El **SUBSECTOR INDUSTRIAL** compuesto por las plantas que procesan las materias primas.

- c) El **SUBSECTOR CONSUMIDOR** en el cual se reúnen todas las actividades de almacenamiento de los mayoristas y la distribución a los sitios de venta al detal.

Para simplificar el análisis no se tienen en cuenta insumos diferentes a los principales ni se analiza la situación de los subproductos industriales, aunque, de quererse así, podrían incluirse.

3.1 Restricciones del Sistema

Si se analizan los flujos y los procesos internos propios de cada uno de los subsectores mencionados en los párrafos anteriores —ver Figura No. 2 para mayor claridad— resulta claro que el conocimiento de los costos asociados con cada subsector, y de aquellos correspondientes a los flujos entre todos y cada uno de ellos, permitirá calcular el costo total del sistema para una demanda dada (definida en volumen y localización) y para una estructura de producción también dada.



ALTERNATIVAS DE ABASTECIMIENTO
Figura No. 2

Sin embargo, el cálculo anterior exige una definición precisa de todas las variables que intervienen en el sistema. La rigidez anterior no está siempre de acuerdo con la situación real ya que sólo algunas de las condiciones presentes son inherentes al **SECTOR PRODUCTIVO**: capacidad de las unidades industriales, producción de materia prima nacional y posibilidades de importación. Aún en aquellos casos en los cuales sean propias del **SECTOR PRODUCTIVO** tienen el carácter de un límite superior y no el de un valor que debe satisfacerse en su totalidad. En el caso de los flujos existe una libertad mayor ya que nada impide modificar las políticas de abastecimiento o distribución salvo en ciertos casos en los cuales la única posibilidad de abastecimiento sea el puerto de importación más cercano.

Las consideraciones anteriores sugieren modificar la formulación del problema.

Si se define como **ESTRUCTURA DE PRODUCCION** el conjunto de restricciones reales relativas a las unidades industriales (es decir, un conjunto de capacidades máximas de producción distribuidas geográficamente), una disponibilidad dada de materias primas definida en volumen y ubicación geográfica permitirá abastecer una cierta demanda (definida en igual forma) de diversas maneras. Estas soluciones se diferenciarán las unas de las otras en el aprovechamiento que hagan de las materias primas disponibles y/o de la capacidad industrial instalada o por la forma de abastecer las unidades de producción y/o demanda.

3.2 Los Optimos Condicionales

El Modelo busca, en su primera etapa, la solución óptima sobre la base de una estructura de producción, una demanda por el producto y una disponibilidad u oferta de materias primas.

Si se admite que tanto la disponibilidad de materias primas como la demanda por el producto final son fijas y conocidas para un año dado (suposición que se discute más adelante), podrá obtenerse el sistema de flujo óptimo (el mínimo costo social) para diversas estructuras de producción.

Se obtendrá para cada uno de los períodos bajo estudio una serie de óptimos (condicionales) - condicionales debido a que esas soluciones serán óptimas solamente, y únicamente, cuando exista la estructura de producción indicada en cada uno de los casos. Es posi-

ble encontrar esos óptimos condicionales mediante el empleo de un modelo de **PROGRAMACION LINEAL DEL TIPO DE TRANSPORTE CON TRANSBORDO**.

Como en todo modelo, el utilizado aquí representa una aproximación a la situación real. Se detallan a continuación las simplificaciones que se han hecho en el caso de este trabajo.

3.2.1 Subsector de Materias Primas

Cuando se trata de materias primas importadas no se hace necesaria ninguna simplificación ni en los costos ni en los puntos de ingreso al país.

Cuando se consideran materias primas producidas en el país deben hacerse algunas simplificaciones. Supóngase, por ejemplo, que se trata de materias primas agrícolas. La enorme cantidad de precios que pueden abastecer los centros de producción, para cada materia prima, impide identificar cada uno de ellos dentro del sector y se hace necesario entonces agruparlos de alguna manera y tener en cuenta el grupo. Esta agrupación se refleja, es claro, en una pérdida de precisión con relación a la situación real pero, por otra parte, permite cálculos más confiables en relación con el potencial de producción y sus costos al dejar campo para compensar comportamientos individuales variables. Es así posible, por ejemplo, considerar un costo unitario de compra constante, alternativa que no sería válida a nivel individual; ciertamente que un mayor o menor volumen de producción de un grupo no afectaría los niveles de producción individuales (se modificaría el costo) sino el número de agricultores que intervendrían en el proceso.

Parece lógico, en estos casos, usar el centro de gravedad de cada grupo de manera que el único riesgo que se corre es el de perder las economías de escala en el transporte en relación con la distancia lo cual, por lo demás, no parece tener mucha importancia dado al tamaño de las variaciones que se pueden presentar entre las distancias de cada individuo a la planta industrial y la distancia media cuando se considera el centro de gravedad.

Se calcula la disponibilidad máxima de materia prima suponiendo que existe una planta industrial que utilice ese suministro. Si la solución óptima no incluye dicha planta, la disponibilidad no será real y el estimativo incorrecto pero, por esa misma razón, no se utilizará y el error no tendrá ningún efecto.

De existir restricciones de alguna naturaleza con respecto a las materias primas importadas también pueden tenerse en cuenta sin dificultad mayor.

Es necesario suponer, para cada trayecto, un costo constante de transporte por unidad de materia prima. Esta suposición no parece muy restrictiva si el volumen transportado es de consideración aunque, en caso contrario, puede llegar a serlo.

3.2.2 Subsector Industrial

Dadas las características de los procesos industriales, la función de producción —por ejemplo, materias primas y costos de distribución del producto— puede considerarse como si fuera lineal, al menos dentro de los rangos de variación que se presentan en la realidad.

Debe distinguirse un costo fijo anual y un costo variable pero constante por unidad de producción.

Para estudiar, y tener en cuenta, la capacidad de producción solamente deben analizarse con detenimiento las plantas existentes. El modelo exige definir una capacidad máxima de producción, capacidad que el mismo modelo evaluará en cuanto a su aprovechamiento total o parcial. Cabe anotar que en la determinación de la capacidad anual de producción intervienen otros factores adicionales, además de la capacidad instalada, tales como la longitud del período dentro del cual pueda disponerse de materia prima y que depende, a su vez, por ejemplo, de las características climatológicas y agrícolas de la región.

Se supone un costo constante por unidad transportada para el transporte del producto terminado desde el subsector industrial hasta el subsector consumidor. La hipótesis parece aceptable por las mismas razones expuestas con respecto al transporte de materias primas.

3.2.3 Subsector Consumidor

Se presenta aquí nuevamente el problema de la multiplicidad de agentes involucrados en el consumo por lo cual se hace indispensable su agrupación.

Al formularse los objetivos de este trabajo se dejó claro que uno de sus propósitos fun-

damentales era la definición de una política de inversiones y de modificaciones que se denominó una estructura de producción. En consecuencia, las localizaciones de las bodegas mayoristas de distribución se consideran como una variable exógena y, aún más, que su capacidad se adapta a la demanda de los centros de consumo que cada una de ellas sirve. De acuerdo con lo anterior la demanda se encuentra en las bodegas mayoristas que la satisfacen.

Al hacer lo anterior se aceptan implícitamente las siguientes suposiciones:

- a) La localización geográfica de las bodegas mayoristas de distribución no se modificará en el futuro y éstas cambiarán su capacidad de acuerdo con los niveles de la demanda en la zona de influencia de cada una de ellas;
- b) El óptimo del sistema —por ejemplo, la distribución de los mayoristas al consumidor— es el mismo que se obtendría al incluir esta última etapa.

Aun cuando la primera suposición parece discutible, a primera vista, hay dos puntos que sugieren aceptarla:

- a) Existe de hecho una cierta racionalidad en la localización de las bodegas de un sistema existente; si esa localización no es óptima para la demanda presente tampoco podrá mejorarse sustancialmente.
- b) Salvo muy raras excepciones en el caso de productos especiales, no cabe esperar, normalmente, expansiones violentas de la demanda en lugares en los cuales no se tenga una bodega de distribución.

Si se acepta la primera suposición también debe serlo la segunda. Si la primera se adopta queda automáticamente definida una demanda por parte de los mayoristas y, en consecuencia, el abastecimiento óptimo de la demanda final será la suma del suministro óptimo a nivel de mayoristas y la distribución óptima que éstos hagan a los consumidores. Es este razonamiento el que ha llevado a considerar que el conjunto de variables y restricciones que representa la etapa de comercialización del producto final es, hablando en términos de Investigación de Operaciones, un subconjunto separable del problema total.

Para la demanda del producto final —lo mismo que para la oferta de materias primas—

se emplean volúmenes anuales. Esta simplificación, neutra desde el punto de vista de la evolución de las inversiones en el sector productivo, hace que carezca de sentido incluir en el análisis la comercialización en la cual sí tienen marcada influencia las variaciones estacionales. Por ello este trabajo no tiene en cuenta este aspecto del problema.

3.2.4 Observaciones Generales

Todos los costos mencionados son costos sociales. Su definición y cálculo debe aparecer asociado con cada uno de los factores que aparecen en el proceso.

Las variables físicas —flujos, disponibilidades, capacidades, demandas, etc. - que intervienen en el sistema (y, en consecuencia, los costos unitarios asociados con ellas) deben expresarse, por comodidad, en una unidad homogénea antes de introducirse en el modelo matemático de optimización. Por ejemplo: unidad equivalente de producto terminado, tonelada de azúcar refinada equivalente y similares.

3.3 El Método de Cálculo

3.3.1 Subíndices Simbólicos

- h : disponibilidad de materias primas sobrantes.
- i : un origen de materia prima (básica o partes).
- j : un centro de producción industrial (planta).
- k : un centro de demanda (consumo).
- r : un centro importador de productos terminados (origen).
- a_i, a_r : disponibilidad anual de materia prima en el origen i (de productos terminados en el origen r)
- b_j : capacidad de producción anual de la planta j
- d_k : demanda anual en el centro de consumo k

Como se verá más adelante, el problema se plantea tratando de buscar flujos que, sin violar las restricciones reales, minimicen el costo total.

En general, X designa un flujo (volumen anual) entre dos centros, y C el costo unitario de ese flujo.

- X_{ij} : flujo de materias primas del origen i a la planta j

- C_{ij} : Costo unitario de X_{ij} puesto en j . Incluye el costo de producción o importación más el transporte.
- X_{jk} : flujo de productos terminados desde la planta j al centro de consumo k
- C_{jk} : costo unitario de X_{jk} puesto en k . Incluye el costo variable de elaboración (materia prima) más transporte
- X_{rk} : flujo del producto terminado desde el centro de importación r al centro de consumo k
- C_{rk} : costo unitario de X_{rk} puesto en k . Incluye el costo de importación y de transporte
- X_{rh}, X_{ih} : excedentes de las disponibilidades de materias primas en los orígenes r e i . Son flujos ficticios, ya que no se presentan en la realidad.
- C_{rh}, C_{ih} : costos asociados con los excedentes X_{rh} y X_{ih} . Como en la realidad no se presentarán (sería inútil producir o importar estas materias primas), estos costos son nulos.
- X_{jj} : Flujo de una planta j a sí misma; debe interpretarse como capacidad ociosa en esa planta.
- C_{jj} : costo de la unidad de capacidad ociosa (X_{jj}). Por la forma que tiene la función de producción adoptada (costo fijo más costo variable unitario constante) este costo es nulo*.

3.3.2 Planteamiento

Con la notación indicada el problema puede plantearse matemáticamente en los siguientes términos:

* Si el costo total C_t para un nivel de producción q es

$$C(q) = k + Cq$$

entonces, el costo medio

$$C = \frac{C_t(q)}{q} = \frac{k}{q} + C$$

es decreciente con el nivel de producción q sin necesidad de introducir un costo proporcional a la capacidad no utilizada.

- a) Para cada origen de materias primas (r ó i), la suma de los flujos que se generan allí más los excedentes de la disponibilidad, debe ser igual a la disponibilidad total:

$$\sum_k X_{rk} + X_{rh} = a_r \quad \forall_r \quad (1)$$

$$\sum_j X_{ij} + X_{ih} = a_i \quad \forall_i \quad (2)$$

- b) Para cada centro de consumo, la suma de los flujos provenientes de las plantas más la importación de productos terminados debe ser igual a la demanda:

$$\sum_j X_{jk} + \sum_r X_{rk} = d_k \quad \forall_k \quad (3)$$

- c) Una planta no puede recibir ni entregar una cantidad que sea superior a su capacidad de producción. Recordando que X_{ij} es la capacidad ociosa de la planta, se tiene, desde el punto de vista del suministro:

$$\sum_i X_{ij} + X_{jj} = b_j \quad \forall_j \quad (4)$$

y desde el punto de vista de la producción

$$\sum_k X_{jk} + X_{jj} = b_j \quad \forall_j \quad (5)$$

Cabe hacer notar que de las dos últimas relaciones se desprende que el total de materias primas recibido en una planta j

$$\left(\sum_i X_{ij} \right)$$

debe ser forzosamente igual al total de la producción que se distribuye a los diversos centros de consumo

$$\left(\sum_k x_{jk} \right)$$

no vale la pena, entonces, incluir esta última condición.

Si I, J, K, R representan el número total de índices de tipo i, j, k, r respectivamente, el sistema de ecuaciones formado por las expresiones (1), (2), (3), (4) y (5) tiene:

$$R + I + K + 2J \text{ ecuaciones}$$

El número de variables será:

$$\begin{array}{ll} X_{ij} & : I \text{ por } J \\ X_{rk} & : R \text{ por } K \\ X_{jk} & : J \text{ por } K \\ X_{rh} & : R \\ X_{ih} & : I \\ X_{jj} & : J \end{array}$$

$$\text{Total} \quad : R + I + K + R + J = (I + I + K) \text{ variables}$$

Queda claro que existe más de una solución y que se buscará aquella que haga mínimo el costo total:

$$\begin{aligned} \text{Mínimo costo total} = \text{Mín.} & \left[\sum_{ij} X_{ij} C_{ij} + \sum_{rk} X_{rk} C_{rk} + \sum_{jk} X_{jk} C_{jk} + \right. \\ & \left. + \sum_r X_{rh} C_{rh} + \sum_i X_{ih} C_{ih} + \sum_j X_{jj} C_{jj} \right] \end{aligned}$$

expresión de la cual pueden omitirse las tres últimas sumatorias ya que, por definición

$$C_{rh} = C_{ih} = C_{jj} = 0$$

Es evidente que la solución anterior equivaldría a la misma que se obtendría al sumar los costos fijos como consecuencia de la definición de estos últimos. Basta, por lo tanto, sumarle los costos fijos al costo óptimo encontrado, para tener así el costo mínimo total del sistema con las disponibilidades, demanda y estructura productiva establecida.

La linealidad de las ecuaciones y los costos variables unitarios constantes permiten, para obtener esta solución, el uso de la **Programación Lineal** y más específicamente, de un modelo de **Transporte con Transbordo**. En efecto, considérense la matriz y los vectores columna y línea que aparecen en la Figura No. 3.

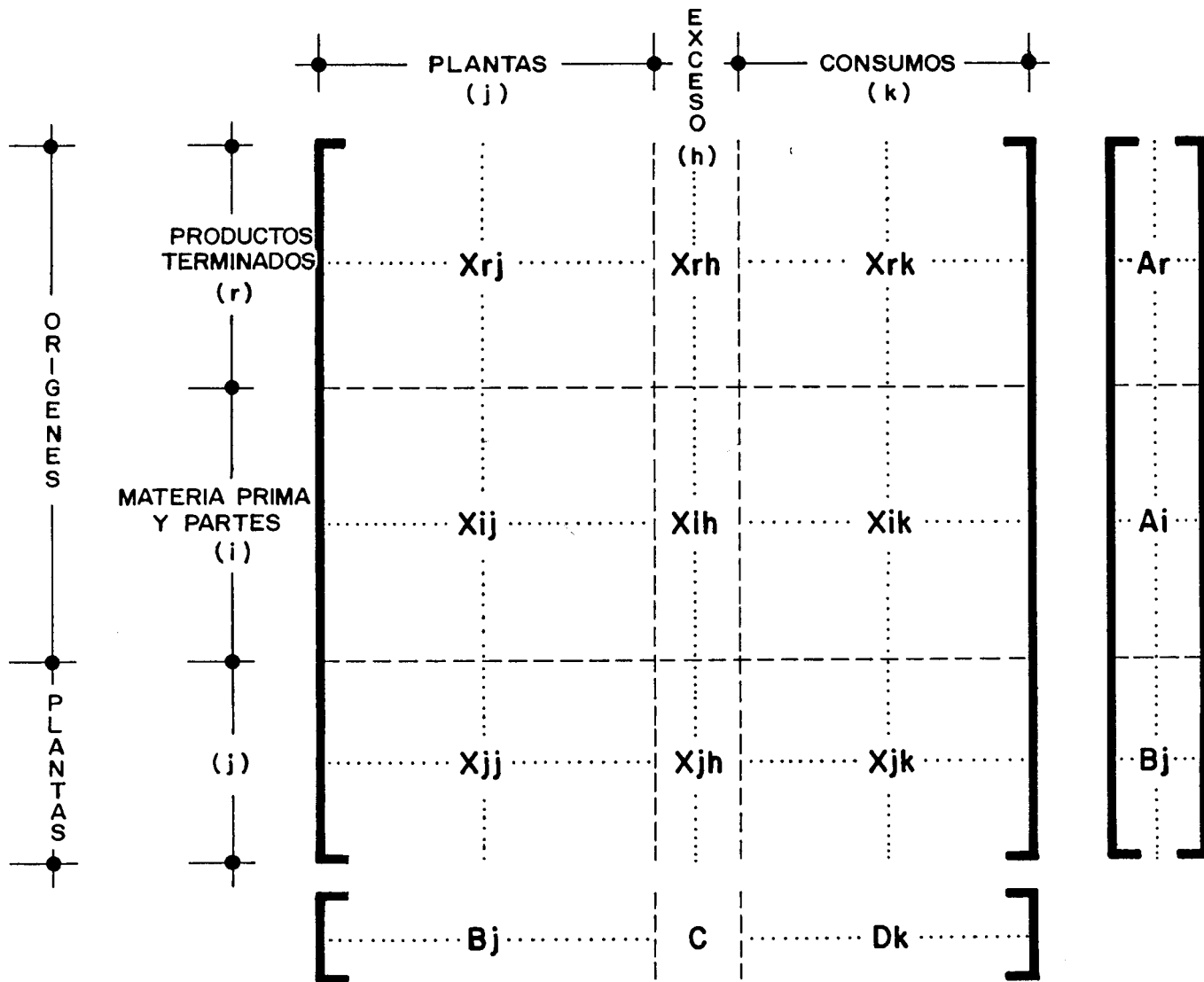
Los siguientes flujos aparecen en la matriz de la Figura No. 3 pero no deben intervenir en la solución por no corresponder a una posibilidad real ni tener interpretación económica:

- X_{rj} : flujo de productos terminados desde el centro de importación r a la planta j (esta no procesa esa materia prima)
- X_{ik} : flujo del origen de materias primas i al centro de consumo k (no puede satisfacerse la demanda sin elaborar la materia prima)
- X_{jj} : flujo de productos terminados de una planta j a otra j . Dado que en el modelo no existen bodegas en las plantas (no se considera la estacionalidad de la producción) este flujo no tiene sentido
- X_{jh} : flujo de excedentes de una planta. No tiene significado (a X_{jj} se le asignó el carácter de capacidad ociosa)

Para estos flujos sin significado real, que en principio se admiten en el modelo, debe eliminarse la posibilidad de que aparezcan en la solución óptima. Una manera cómoda de lograr lo anterior, dado que se trata de minimizar el costo total (producto de los flujos X por su costo respectivo C , más los costos fijos asociados con la estructura de producción analizada), es asignándole a esos flujos unos costos suficientemente elevados.

El mismo mecanismo se utiliza en el caso de flujos de materias primas enviados a una planta que no elabora ese tipo de producto, de modo que también existen algunos C_{ij} con un valor arbitrariamente alto.

Asignando, en la forma antes descrita, un valor nulo a las variables sin sentido, al hacer igual la suma de los flujos sobre cada línea y columna de la matriz de la Figura No. 3 al elemento correspondiente en el vector asociado, se obtienen las mismas ecuaciones originalmente formuladas, especificándose esta vez que la suma de los excedentes (columna con subíndice h) debe ser igual a un valor c que corresponde al excedente de la oferta de materias primas y disponi-



MATRIZ DE FLUJOS

bilidades de importación sobre la demanda total.

Conociendo la matriz de los costos asociados con la matriz correspondiente de flujos y los vectores asociados (disponibilidades, demandas y capacidades) puede encontrarse la matriz de flujos óptimos con la ayuda de un algoritmo especialmente diseñado para tratar este tipo de problemas.

3.4 El Procesamiento

Tal como se dejó dicho ya, el procesamiento se realiza por etapas.

Para un año en particular, se definen las disponibilidades a_j y a_r de materia prima e importación de producto terminado y las demandas d_k .

Además de estos datos básicos, se diseñan diferentes estructuras alternativas de producción. Cada una de ellas representa una cierta configuración geográfica de capacidades industriales hipotéticamente instaladas. En consecuencia, cada una define valores de b_j y de costos que permiten encontrar el conjunto de flujos que optimizan el funcionamiento de esas estructuras.

Se obtiene así, para cada año, una serie de alternativas para satisfacer la demanda, alternativas que difieren entre sí básicamente en la inversión requerida y, en consecuencia, en el costo total de cada una de ellas. Aún más, dos estructuras de producción idénticas tendrán un costo total diferente al ser ensayadas en años diferentes ya que tanto las disponibilidades de materias primas como la demanda, e incluso el costo, pueden variar en ese lapso de tiempo.

Las inversiones relacionadas con un cambio de la estructura productiva deberían cargarse al pasar de una a otra, ya que así se representaría fielmente la realidad (al menos en el caso de pago de contado). Sin embargo, y por razones de otro orden, el período de análisis es rara vez tan largo como la vida útil de las inversiones y, entonces, al proceder en esta forma se hace indispensable asignar un valor de salvamento al fin del período, sin lo cual podrían crearse distorsiones serias.

En la práctica, resulta más fácil operar con anualidades equivalentes, es decir, con un valor anual cuya suma actualizada a lo largo de la vida útil de la inversión sea idéntica al monto de la inversión inicial. Este concepto es, en realidad, análogo al de

depreciación y únicamente difiere de él en que solo aparecerá en las nuevas inversiones porque las existentes, en el momento de comenzar, ya han sido pagadas o tienen pagos comprometidos ineludibles. No tendría sentido, en consecuencia, considerar este costo como adicional ya que se incurriría en él cualquiera que sea la solución que se adopte.

3.5 El Optimo global - Soluciones Alternativas

En la presentación que sigue, deberá entenderse por **estado** la solución (óptimo condicional) obtenida con una configuración de plantas industriales en un año, o período de tiempo, dado. Con cada estado se tiene asociado, en consecuencia, un costo compuesto por el costo variable total del sistema (valor de la función objetiva) al cual se agrega el total de costos fijos correspondientes a ese estado y las cuotas anuales equivalentes de las inversiones nuevas con relación al estado original del sistema.

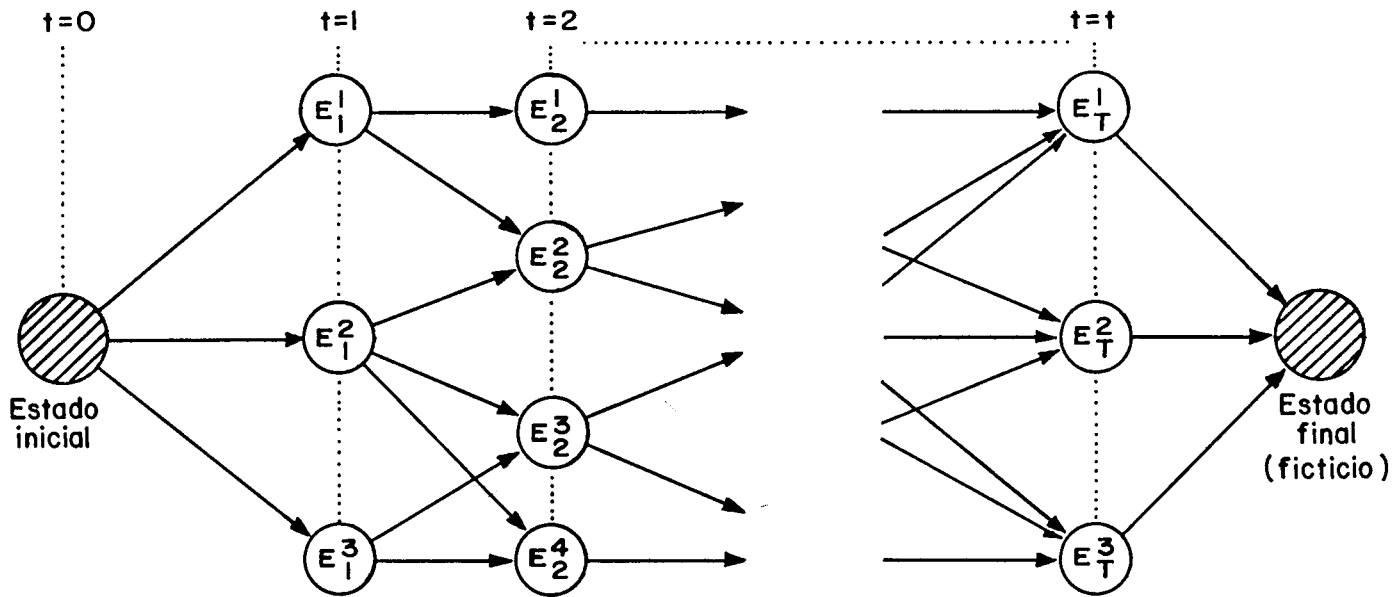
Como resultado de la primera etapa se obtiene una serie de estados posibles para cada uno de los períodos analizados. La búsqueda de la solución óptima global puede reducirse entonces a la secuencia óptima de estados a lo largo del período bajo estudio.

Tal como se mencionó ya, la secuencia óptima es aquella que produzca el menor costo total actualizado para el período en cuestión. En otras palabras, los costos asociados con cada estado en un año t (llamando año cero el período base) se modifican multiplicándolos por el coeficiente $(1 + i)^{-t}$ en donde i es la tasa de interés o valor de la moneda.

El problema puede formularse en términos de la búsqueda del camino de mínimo costo que una el estado inicial (cuyo costo es independiente de la optimización en el resto de los períodos por lo cual se le asigna un costo arbitrario igual a cero) con un estado final ficticio en el cual se reúnen todos los caminos (ver la Figura No. 4).

El problema, planteado en los términos anteriores, puede ser resuelto con la ayuda de algoritmos simples propios de la **teoría de redes**.

Sin embargo, el realizarlo así obliga a obtener como respuesta la solución óptima. Por esta razón, se ha dejado abierta la posibilidad de los cálculos manuales, permitiéndose así la evaluación de soluciones alternativas que interese comparar con la óptima. Aún cuando, desde el punto de vista estrictamente teórico, este último enfoque parece innecesario, revela su utilidad en la práctica. En efecto, frente a un problema de la com-



E_i^j : estado j en el período i

C_i^j : costo total del estado j en el período i

La secuencia (estado inicial) $\left[- (E_1^k) - (E_2^r) \dots \dots \dots - (E_T^s) - \right]$ (estado final), tendrá un costo total actualizado igual a :

$$\bar{C}_{k,r,\dots,s} = \frac{C_1^k}{(1+i)^1} + \frac{C_2^r}{(1+i)^2} + \dots \dots \dots + \frac{C_T^s}{(1+i)^T} \quad i = \text{tasa de interés}$$

BUSQUEDA DE LA SECUENCIA OPTIMA DE ESTADOS

Figura No. 4

plejidad y magnitud del tratado en este escrito no es posible una cuantificación total de todos los factores que intervienen en él. El disponer de los costos asociados con diversas alternativas (y en consecuencia, de los mayores costos de una cualquiera de ellas con respecto a la óptima) permite conocer cuál es el valor mínimo que debe atribuirse a estos factores no cuantificados para que una alternativa, en principio no óptima, sea la que convenga adoptar. El disponer de estas cotas inferiores parece de especial importancia en las circunstancias actuales en las cuales una serie de factores económicos no reflejados en el sistema de precios son reconocidos unánimemente, sin existir, desgraciadamente, el mismo criterio unánime sobre cómo valorarlos.

4. CONCLUSIONES

Del estudio presentado se pueden sacar algunas conclusiones prácticas:

- a) El número de técnicas y procedimientos que se tienen a la mano para encontrar la solución a los problemas prácticos es grande y solo basta un poco de estudio y análisis para identificarlos y adaptarlos, en caso necesario;
- b) Parece claro que así como es indispensable contar con grupos multidisciplinarios para enfrentar adecuadamente los problemas de nuestros días también es ineludible, aunque a menor escala, hacerlo con varias técnicas y procedimientos dentro de una misma disciplina;
- c) Para ser originales no se requiere volver a “descubrir el agua tibia” sino que basta saber dónde se encuentra y cómo recogerla para servirse de ella;
- d) La identificación de los pasos a seguir para encontrar la solución de un problema práctico implica que se hayan hecho primero unas suposiciones básicas de las cuales depende, e influyen, la solución;
- e) Los problemas deben enfrentarse con honestidad científica dejando en claro las limitaciones del método empleado y las consecuencias de esas limitaciones sobre el resultado final.

PUBLICACIONES DEL ICESI

- No. 1 - La Metodología de Sistemas y la Solución de Problemas Sociales.
Autor: Alberto León Betancourt, Ph.D.
Mimeógrafo
29 páginas
Marzo de 1.980
- No. 2 - Composición Anticipada de Intereses. Su efecto sobre la Evaluación Económica de Inversiones y su Relación con el Descuento Bancario.
Autor: Luis Fernando Gutiérrez, M.Sc.
Mimeógrafo
18 páginas
Junio de 1.980
- No. 3 - La Gran Cruzada contra la Desvivienda.
Autor: Germán Holguín Zamorano, Master en Administración Industrial.
Mimeógrafo
10 páginas
Agosto de 1.980
- No. 4 Modelo de Expansión de un Sector Productivo
Autor: Alberto León Betancourt, Ph.D.
Mimeógrafo
22 páginas
Octubre, 1980