



EXAMEN FINAL DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES. 25 de noviembre de 2009

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

NOTA: NO ES NECESARIO CONTESTAR TODAS LAS PREGUNTAS DEL PRESENTE CUESTIONARIO: SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS DE UN TOTAL DE **110**.

1. (24 puntos) Utilice los tres primeros términos de una serie de potencias adecuada para aproximar el valor de las integrales siguientes: (a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$. (b) $\int_0^1 \int_0^1 e^{xy} dy dx$.

2. (a) (6 puntos) Sea $w = f(x, y)$, donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Muestre que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (w_r)^2 + \frac{1}{r^2}(w_\theta)^2.$$

(b) (9 puntos) Considere la función $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 + y}$.

i. Identifique y dibuje el dominio y la gráfica de f .

ii. Calcule el gradiente de f en el punto $(1, 6)$ y la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por ese punto.

3. (24 puntos)

(a) Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$.

(b) Encuentre la distancia mínima del origen a la superficie $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.

4. (a) (10 puntos) Calcule $\int_0^2 \int_x^2 x \sqrt{1+y^3} dy dx$.

(b) (12 puntos) Escriba la integral siguiente en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas (NO evalúe las integrales):

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x dz dy dx.$$

(c) (13 puntos) Calcule el volumen del sólido acotado entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 10 - x^2 - 3y^2$.

5. (12 puntos) Determine el valor de verdad de las proposiciones siguientes. Justifique claramente sus respuestas.

(a) El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(p)$ es $-||\nabla f(p)||$, para todo vector \mathbf{u} unitario.

(b) Las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n}$ tienen el mismo intervalo de convergencia.

(c) $\int_a^b \int_c^d f(x)g(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right)$