UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL. 19 de mayo de 2009

NOMBRE:____________________ CÓDIGO:__________

PROFESOR:____________________ GRUPO:__________

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **110** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. .
   (a) (8 puntos) Escriba la ecuación del plano π que contiene los puntos (1,2,1), (-2,3,-1) y (1,0,4).
   (b) (7 puntos) Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta l que pasa por el punto $P(-9,10,7)$ y es perpendicular al plano π.
   (c) (7 puntos) Encuentre el punto Q que resulta de la intersección de la recta l con el plano π.

2. Sea $L: \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ una función definida por : $L(at^2+bt+c) = (a+2c)t^2 + (b-c)t + (a-c)$.
   (a) (4 puntos) Muestre que L es una transformación lineal.
   (b) (6 puntos) Encuentre la matriz de L con respecto a la base canónica de P_2.
   (c) (4 puntos) Encuentre una base para el núcleo de L y una base para la imagen de L.
   (d) (4 puntos) ¿L es inyectiva? ¿L es sobreyectiva? Justifique su respuesta.
   (e) (6 puntos) ¿$3t+3$ pertenece al núcleo de L? ¿t^2+2t+5 pertenece a la imagen de L? Justifique su respuesta.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
   (a) (8 puntos) Compruebe que los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 4$
   (b) (16 puntos) Determine una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tales que $PD = AP$ (No haga el producto)

4. (30 puntos) Determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos, justificando claramente su respuesta:

   (a) Sea A una matriz de $n \times n$. El conjunto de todas las matrices B de $n \times n$ tales que $AB = BA$ es un subespacio vectorial del espacio de todas las matrices de $n \times n$.

   (b) Sea A una matriz diagonalizable de $n \times n$. Si $C^{-1} A\, C = D$ entonces $A^n = C\, D^n C^{-1}$

   (c) Si dos matrices tienen los mismos valores propios, entonces sus vectores propios son los mismos.

   (d) Sea $L : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una transformación lineal. Entonces,

   $$\textit{Núcleo } (L) = V \quad \textit{sí y sólo sí} \quad \textit{Imagen } (L) = \{0_W\}.$$

   (e) En un espacio vectorial todo conjunto finito de vectores que contenga el vector nulo, es linealmente dependiente.

5. (10 puntos) Resuelva uno y **solamente uno** de los siguientes ejercicios

   (a) Determine una forma cuadrática equivalente a $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - 4xy - y^2 = 12$ e identifique la cónica representada por la forma cuadrática.

   (b) Muestre que la matriz de transición $T = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 \\ 0.8 & 0.0 \end{bmatrix}$ de un proceso de Markov es regular y encuentre su vector de estado estacionario.