UNIVERSIDAD ICESI
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES.

26 de noviembre de 2008

NOMBRE:______________________________ CÓDIGO:______________

PROFESOR:______________________________ GRUPO:______________

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **116** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. (24 puntos)

   (a) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}(x-4)^n$

   (b) Resuelva uno (**solamente uno**) de los siguientes ejercicios:

   i) Muestre que $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ii) Calcule $\displaystyle\int \frac{\arctan x^2}{x}\,dx$

2. (12 puntos) Una pelota de bésibol es golpeada a 3 pies sobre el nivel del suelo, se aleja del bate con un ángulo de $45°$ y es atrapada por un jugador a 3 pies sobre el nivel del suelo y a 300 pies del punto de partida. ¿Cuál es la rapidez inicial de la pelota y que altura alcanza?

3. (24 puntos)

   (a) Sea $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ y $v(x,y) = \arctan(y/x)$. Verifique que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

   (b) Sea $f(x,y) = e^{-x}\cos(y)$. Calcule la derivada direccional de f en el punto $P(0,0)$ en dirección hacia el punto $Q(2,1)$. ¿f crece o decrece en esta dirección? ¿es esta la dirección de mayor razón de cambio de f en P? Explique claramente sus respuestas.

   (c) El radio r de un cilindro circular recto se incrementa a razón de 6 pulgadas por minuto y la altura h decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen del cilindro cuando el radio es de 12 pulgadas y la altura es de 36 pulgadas? ($vol = \pi r^2 h$)

4. (12 puntos) Resuelva uno (**solamente uno**) de los siguientes ejercicios:

   (a) Halle los valores extremos de la función $f(x,y) = 2x^2+y^2-y$ sujeto a la restricción $x^2+y^2 \leq 1$ (para los puntos interiores use el criterio de las segundas derivadas y para los puntos en la frontera $x^2+y^2=1$ use multiplicadores de Lagrange).

(b) Una caja rectangular descansa en el plano xy con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto al origen está en el plano $6x + 4y + 3z = 24$. Halle el volumen máximo de la caja.

5. (20 puntos)

(a) Utilice coordenadas polares para evaluar la integral $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

(b) Utilice un cambio adecuado de variables para evaluar la integral $\displaystyle\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\,dA$

donde R es el cuadrilátero con vértices $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, \pi/2)$, (π, π) y $(\pi/2, \pi/2)$. Debe calcular el jacobiano de su transformación.

6. (24 puntos)

(a) Reescriba la integral $\displaystyle\int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dzdydx$ utilizando el orden de integración $dydxdz$.

Debe dibujar el dominio de integración. No evalúe ninguna de las integrales.

(b) Considere el sólido acotado inferiormente por la superficie $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 3$. i) Dibuje el sólido. ii) Utilice integrales en coordenadas cilíndricas para describir el volumen del sólido. No evalúe las integrales iii) Utilice integrales en coordenadas esféricas para describir el volumen del sólido. No evalúe la integrales.