Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES. 20 de mayo de 2009

NOMBRE: ______________________ CÓDIGO: ____________

PROFESOR: ______________________ GRUPO: ____________

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **112** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. (20 puntos)

   (a) Utilice integración para deducir la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \arctan x$. Verifique que $x = 1$ está en el intervalo de convergencia de dicha serie y utilice los primeros cuatro términos de la serie para aproximar el valor de $\arctan(1)$.

   (b) Escriba los tres primeros términos de una serie de potencias que aproxime el valor de la integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t^2}{t^2}\, dt$. Indique cuál es el orden del error que se comete con esta aproximación.

2. (20 puntos)

   (a) Cuando $t = 0$ un objeto está en el punto $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y tiene un vector velocidad $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$. El objeto se mueve con aceleración $\mathbf{a}(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} - 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$. Justifique por qué se puede concluir que la trayectoria del objeto es una elipse.

   (b) Demuestre que si un objeto se mueve con rapidez constante entonces sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

3. (18 puntos) Considere la función $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

   (a) Identifique y dibuje el dominio de f y la gráfica de f.

   (b) Dibuje un mapa de contorno de f, identificando en particular la curva que pasa por el punto $(2, 8)$

   (c) Utilice propiedades del gradiente de f para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(2, 8)$ a la curva de nivel.

4. (24 PUNTOS)

   (a) Encuentre los puntos de la esfera de centro en el origen y radio 2 que están más cerca y más lejos del punto $P(3, 1, -1)$.

(b) Sea $w = f(x,y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\theta$. Determine si se satisface la ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\text{sen}\theta}{r}$$

(Sugerencia: usando regla de la cadena calcule las cantidades $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial\theta$ y luego construya la parte derecha de la igualdad)

5. (30 puntos)

   (a) Calcule la integral $\displaystyle\int_0^3 \int_{3y}^9 e^{x^2}\, dxdy$

   (b) Convierta la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evalúe la integral iterada más sencilla (debe dibujar el dominio de integración):

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{3/2}\, dzdydx$$

   (c) Utilice un cambio adecuado de variables para evaluar la integral $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$ donde R es la región plana acotada por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.