Taller #1
Econometría 06216
Respuestas sugeridas
(Repaso)

Profesor: Julio César Alonso
Monitora: Valentina Gatti

Notas:
- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado físicamente en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha límite).

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. **Resuelva los siguientes puntos con la información dada en cada literal (escriba <u>todo</u> su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado).**

a. Demuestre que $Cov(\sqrt{a}Y, Y) = \sqrt{a}Var(Y)$, donde a es una variable determinística y Y es una variable estocástica.

Respuesta sugerida: De la definición se covarianza se tiene:

$Cov(\sqrt{a}Y, Y) = E(\sqrt{a}Y * Y) - E(\sqrt{a}Y)E(Y)$

$Cov(\sqrt{a}Y, Y) = E(\sqrt{a}\,Y^2) - E(\sqrt{a}Y)E(Y)$

$Cov(\sqrt{a}Y, Y) = \sqrt{a}\,E(Y^2) - \sqrt{a}\,E(Y)E(Y)$

$Cov(\sqrt{a}Y, Y) = \sqrt{a}\left[E(Y^2) - (E(Y))^2\right]$ Dado que $Var(Y) = \left[E(Y^2) - (E(Y))^2\right]$

$Cov(\sqrt{a}Y, Y) = \sqrt{a}Var(Y)$

b. Suponga que X y Y son variables aleatorias. Encuentre $E(XY), Cov(X,Z)\ y\ Cov(5+2X, 4+6Y)$ a partir de los siguientes datos. *(muestre el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta y, aunque no debe reportar todos los decimales, en sus cálculos debe incluirlos todos, de tal forma que la respuesta sea exacta):*

$\rho_{XY} = 0.45$
$\rho_{XZ} = 0.36$
$\sigma_Z^2 = 4738/9$
$X = [5 \quad 20 \quad 31 \quad 27 \quad 49 \quad 6 \quad 12 \quad 21 \quad 17 \quad 23]$
$Y = [86 \quad 34 \quad 44 \quad 71 \quad 26 \quad 96 \quad 28]$

Respuesta sugerida:
$E(X) = 21.1$

$Var(X) = 10370/69 \cong 150.29$

$E(Y) = 55$

$Var(Y) = 5030/7 \cong 718.57$

$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \longrightarrow Cov(X,Y) = \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y$

$Cov(X,Y) = 0.45 * \sqrt{150.29} * \sqrt{718.57} = 147.881051$

$Cov(5+2X, 4+6Y) = 2*6\,Cov(X,Y) = 12 * 147.881051 = {}^{12422}/_{7}$

$E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y) = 147.881051 + 21.1 * 55 = {}^{27476}/_{21} \cong 1308.38$

$Cov(X,Z) = \rho_{XZ} * \sigma_X\sigma_z = 0.36 * \sqrt{150.29} * \sqrt{4738/9} = {}^{405}/_{4} \cong 101,25$

c. Suponga que W y K son variables aleatorias. Si se sabe que $Var(W) = 96$, $Var(K) = 22$ y $\rho_{W,K} = \frac{1}{2}$. Encuentre $Var(W+K)$ y $Var(6W + 9 + 4K)$.

Respuesta sugerida:

- Teniendo en cuenta que $\rho_{W,K} = \frac{Cov(W,K)}{\sqrt{Var(W)Var(K)}} \longrightarrow Cov(W,K) = \rho_{W,K}\sigma_W\sigma_K$ entonces,

De las principales propiedades de la varianza se tiene que:

$Var(W+K) = Var(W) + Var(K) + 2Cov(W,K)$

$Var(W+K) = Var(W) + Var(K) + 2(\rho_{W,K}\sigma_W\sigma_K)$ Así pues:

$Var(W+K) = 96 + 22 + 2\left(\frac{1}{2} * \sqrt{96} * \sqrt{22}\right)$

$Var(W+K) = 163.95$

- Teniendo nuevamente en cuenta las propiedades de la varianza se tiene que:

$Var(6W + 9 + 4K) = Var(6W) + Var(4K) + 2Cov(6W, 4K)$ Dado que 9 es una constante $Var(9) = 0$

$Var(6W + 9 + 4K) = 6^2Var(W) + 4^2Var(K) + 2*6*4(\rho_{W,K}\sigma_W\sigma_K)$

$Var(6W + 9 + 4K) = 36*96 + 16*22 + 2*6*4(\frac{1}{2} * \sqrt{96} * \sqrt{22})$

$Var(6W + 9 + 4K) = 4910.96$

2. **Un grupo de estudiantes de economía se encontraban en una excursión académica en Europa. Mientras viajaban por tren, entre dos países europeos, fueron sorprendidos por una tormenta que paralizó el sistema de transporte, y los dejó atrapados en dicho sitio. En medio del**

aburrimiento uno de los excursionistas se inventó un juego en donde además de lanzar dos dados, uno negro y otro blanco, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que continúe la tormenta o no (según informó el piloto del metro, la institución meteorológica local afirma que existe una probabilidad de 1/4 de que continúe la tormenta). Entonces se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar, mientras una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si la cara superior del dado negro es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13

Si la cara superior del dado blanco es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	3
3	-7
4	-9
5	-11
6	-14

Si	Remuneración (miles de pesos)
Continúa la tormenta	8
No continúa la tormenta	6

Sean X , Y y Z los ingresos recibidos por cada jugador por el resultado del dado negro, blanco y el estado del clima, respectivamente.

A partir de la información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X , Y y Z

Respuesta sugerida:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i P(X_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{32}{6}=5.333$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n} Y_i P(Y_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} Y_i=\frac{-37}{6}=-6.16$$

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n} Z_i P(Z_i)=\frac{8}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)6=6.50$$

b. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W

Respuesta sugerida:

$$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

$$E(W)=\frac{32}{6}-\frac{37}{6}+6.50$$

$$E(W)=5.66$$

c. Calcule la varianza de X

Respuesta sugerida:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{272}{6}-\frac{256}{9}=16.89$$

d. Calcule la varianza de Y

Respuesta sugerida:

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{457}{6}-\frac{1369}{36}=38.14$$

e. Calcule la varianza de Z

Respuesta sugerida:

$$Var(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=43-42.25=0.75$$

3. Siguiendo con la pregunta anterior.

a. Demuestre que Y y Z son independientes.

Respuesta sugerida:

Si Y y Z son independientes entonces $Cov(Y,Z)=0$ por tanto se tendría que:
$E(YZ)=E(Y)E(Z)$
Con el fin de llegar a esta igualdad lo primero que se debe hacer es calcular las remuneraciones conjuntas de tal manera se obtiene:

$ZY =$

		Y					
		1	3	-7	-9	-11	-14
Z	8	8,00	24,00	-56,00	-72,00	-88,00	-112,00
	6	6,00	18,00	-42,00	-54,00	-66,00	-84,00

Tras obtener *YZ* , es decir las remuneraciones conjuntas se procede a establecer cuál es la esperanza de estas. Pero como se estableció en el taller existen unas probabilidades de ocurrencia tanto para Y como para Z, por lo tanto es necesario determinar las probabilidades de cada remuneración conjunta. Así la probabilidad de ocurrencia de la primera remuneración conjunta es $P(Z=8,Y=1)=\left({}^{1}/_{4}\right)\left({}^{1}/_{6}\right)=$ ${}^{1}/_{24}$

De manera similar se calculan las restantes probabilidades y se obtiene
$P(Z=z,Y=y)=$

		Y					
		1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Z	¼	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24
	¾	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Para obtener *E*(*YZ*) solo restaría efectuar la multiplicación de cada remuneración conjunta con su respectiva probabilidad de ocurrencia y sumar los resultados, dicho procedimiento debe dar como resultado

$(ZY)P(Z=z,Y=y)=$

0,33	1,00	-2,33	-3,00	-3,67	-4,67
0,75	2,25	-5,25	-6,75	-8,25	-10,50
E(YZ)=	-40,1				

Al comparar $E(YZ)$ con $E(Y)E(Z)$ es claro que Y y Z con independientes.

b. ¿Son Z^2y Z^4 variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta

Respuesta sugerida:

Esta pregunta se desarrolla de una manera similar a la anterior la diferencia es que ahora se quiere probar que $E(Z^2Z^4) = E(Z^2)E(Z^4)$. Lo primero que se debe hacer es obtener las remuneraciones conjuntas.

$Z^2Z^4 =$

		Z^4	
		4096	**1296**
Z^2	**64**	262144	82944
	36	147456	46656

Se procede entonces a obtener las probabilidades de las remuneraciones conjuntas:

$P(Z^2 = z, Z^4 = z) =$

		Z^4	
		1/4	¾
Z^2	¼	1/16	3/16
	¾	3/16	9/16

Solo restaría efectuar la multiplicación de cada remuneración conjunta con su respectiva probabilidad de ocurrencia y sumar los resultados, dicho procedimiento debe dar como resultado:

$(Z^2Z^4)P(Z^2 = z, Z^4 = z) =$

16384,00	15552
27648,00	26244
$E(Z^2Z^4)$=	85828

Y dado que:

$E(Z^2) = 1996$

$E(Z^4) = 43$

$E(Z^2)E(Z^4) = 85828$

Se puede concluir que Z^2y Z^4 son variables independientes.

c. ¿Son X^2 y X variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta

Respuesta sugerida:

Esta pregunta se desarrolla de la misma manera que la anterior la diferencia es que ahora se tiene que probar que $E(X^2X) = E(X^2)E(X)$. Lo primero que se debe hacer es obtener las remuneraciones conjuntas.

$X^2X =$

		X					
		1	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**
X^2	**1**	1	2	3	5	8	13
	4	4	8	12	20	32	52
	9	9	18	27	45	72	117
	25	25	50	75	125	200	325
	64	64	128	192	320	512	832
	169	169	338	507	845	1352	2197

Se procede entonces a obtener las probabilidades de las remuneraciones conjuntas.

$P(X^2 = x, X = x) =$

		X					
		1/6	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**
X^2	**1/6**	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Solo restaría efectuar la multiplicación de cada remuneración conjunta con su respectiva probabilidad de ocurrencia y sumar los resultados, dicho procedimiento debe dar como resultado

$(X^2X)P(X^2 = x, X = x) =$

0,03	0,06	0,08	0,14	0,22	0,36
0,11	0,22	0,33	0,56	0,89	1,44
0,25	0,5	0,75	1,25	2,00	3,25
0,69	1,39	2,08	3,47	5,56	9,03
1,78	3,56	5,33	8,89	14,22	23,11
4,69	9,39	14,08	23,47	37,56	61,03
E(X2X)=	241,8				

Y dado que:

$E(X^2) = 5{,}33$

$E(X) = 45{,}33$

$E(X^2)E(X) = 241{,}8$

Se puede concluir que X^2 y X son variables independientes.

Datos para los ejercicios 4, 5 y 6.

Dadas las siguientes matrices (Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros):

$$A=\begin{bmatrix}20&4&19&48\\5&6&11&1\\14&28&12&2\\7&12&1&1\end{bmatrix}\qquad c=\begin{bmatrix}4\\16\\5\\44\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}5&2&-2&4\\3&8&-9&-3\\5&7&7&2\\6&2&8&1\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}4&10&18&14\\12&14&6&18\\6&2&24&6\\8&11&18&16\end{bmatrix}$$

4. Encuentre (Muestre todo el procedimiento, reporte sus resultados en fraccionarios)
AB, BC, A^TB^T, $(C^TC)B^T$

Respuesta sugerida:

$$AB=\begin{bmatrix}495&301&441&154\\104&137&21&25\\226&340&-180&-2\\82&119&-107&-5\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}218\\-37\\255\\140\end{bmatrix}$$

$$A^TB^T=\begin{bmatrix}110&-47&247&249\\24&-228&282&272\\97&34&34&233\\242&131&131&307\end{bmatrix}$$

$$(C^TC)B^T=\begin{bmatrix}11165&4466&-4466&8932\\6699&17864&-20097&-6699\\11165&15631&15631&4466\\13398&4466&17864&2233\end{bmatrix}$$

5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre:
A^{-1} , $2D+B^T$, $AC+(C^TC)B$, $ran(D)$

Respuesta sugerida:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1/204&36/131&-87/301&230/427\\98/100000&-64/413&95/602&-43/207\\-39/100000&15/242&17/461&-56/479\\7/305&-14/111&19/205&-129/802\end{bmatrix}$$

$$2D+B^T=\begin{bmatrix}13&23&41&34\\26&36&19&38\\10&-5&55&20\\20&19&38&33\end{bmatrix}$$

$AC+(C^TC)B$ NO SE PUEDE porque AC $_{(4x1)}$ no tiene el mismo número de filas y columnas que $(C^TC)B$ $_{(4x4)}$.

$ran(D)=4$

6. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre:
$(AD)^{-1}$, $D^{-1}B$, $\det(D^{-1})$, $ran(BC)$

Respuesta sugerida:

$$(AD)^{-1}=\begin{bmatrix}-5/648&17/539&-2/511&5/376\\-20/261&85/116&-413/702&349/311\\-1/116&40/439&-21/293&13/98\\9/133&-623/989&379/769&-899/959\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}B=\begin{bmatrix}-1/3&9/4&-83/24&-11/24\\-8/3&65/6&-391/12&25/12\\-1/9&47/36&-229/72&31/72\\3/2&119/12&677/24&-13/8\end{bmatrix}$$

$\det(D^{-1})={}^{-1}/_{864}$

$ran(BC)\!: No\ se\ puede$