APUNTES DE ÁLGEBRA MATRICIAL
PARA UN CURSO INTRODUCTORIO DE ECONOMETRÍA

Julio César Alonso C.

No. 11

Diciembre de 2006

APUNTES DE ECONOMÍA

ISSN 1794-029X

No. 11, Diciembre de 2006

Editor

Julio César Alonso C.

jcalonso@icesi.edu.co

Asistente de Edición

Vanessa Ospina L.

Gestión Editorial

Departamento de Economía – Universidad Icesi

www.icesi.edu.co

Tel: 5552334 ext: 207. Fax: 5551441

Calle 18 #122-135 Cali, Valle del Cauca – Colombia

APUNTES DE ÁLGEBRA MATRICIAL

PARA UN CURSO INTRODUCTORIO DE ECONOMETRÍA

Julio César Alonso C[1].

Diciembre de 2006

Resumen

Este documento presenta una breve introducción a los conceptos básicos de álgebra matricial que forman la base de un curso introductorio de Econometría de pregrado. Se discuten conceptos como la independencia lineal, operación de matrices y resultados importantes para la estimación matricial de modelos lineales por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios. Este documento está dirigido principalmente a estudiantes de pregrado de economía, pero por la sencillez del lenguaje, puede ser de utilidad para cualquier estudiante o profesional interesado en repasar los conceptos básicos de álgebra matricial.

Palabras Clave: Álgebra matricial, operaciones de matrices, matriz inversa, Introducción a la econometría.

Apuntes de Economía es una publicación del Departamento de Economía de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico par la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad de su autor.

[1] Profesor del Departamento de Economía y Director del Centro de Investigación en Economía y Finanzas (CIENFI) de la Universidad Icesi, jcalonso@icesi.edu.co.

1 Introducción

El concepto de matrices fue inicialmente desarrollado en el siglo XVII, asociado a la manipulación de gráficos y soluciones de ecuaciones lineales simultáneas. Hoy en día la aplicación de las matrices y sus operaciones están ligadas a áreas tan diversas como la física, gráficos de computador, la economía, los métodos estadísticos, la teoría de juegos, redes, encriptología, etc.

Una matriz es una forma eficiente de ordenar información en columnas y filas. Por ejemplo, consideremos una base de datos que contiene información de ventas, costos y utilidades mensuales para dos empresas (empresa 1 y 2). La información de un mes se puede ordenar fácilmente en una matriz de la siguiente forma:

$$M = \begin{bmatrix} Empresa & Ventas & Costos & Utilidades \\ Empresa\ 1 & a & b & c \\ Empresa\ 2 & d & e & f \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.1)}$$

Generalmente, se omiten los nombres que toman cada una de las columnas y filas de las matrices, es decir, (A2.1) se puede reescribir como

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.2)}$$

El tamaño de una matriz está determinado por el número de filas y de columnas; así, se dice que la matriz M es una matriz de dimensiones 2×3 (2 filas por 3 columnas). Una forma rápida de escribir esto es $M_{2\times 3}$. En general una matriz puede tener n filas y m columnas, y se representa así:

$$A_{n\times m} = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \right] = \left[a_{ij} \right]_{i=1,\ldots n;\, j=1,\ldots,m} \qquad \text{(A2.3)}$$

En el caso especial cuando $m=1$, la matriz A se conoce como un vector columna y se denota por $\underset{\sim}{A}$. Si $n=1$, la matriz A se conoce como un vector fila[2]. Cuando el número de filas y de columnas es el mismo ($n=m$), la matriz A es llamada matriz cuadrada de orden n. Si $n=m=1$, entonces A es conocido como un escalar (lo que coloquialmente se conoce como un número).

En el caso de las matrices, se dice que $A=B$ si y solamente si todos los elementos de la matriz A son iguales a los de B, es decir $a_{ij}=b_{ij}$ para todo i y j, donde $i=1,2,...,n$ y $j=1,2,...,m$

A continuación repasaremos rápidamente las operaciones matriciales, definiciones y resultados más importantes que serán útiles a lo largo de un curso introductorio de econometría. En especial se discutirá:

i. El concepto de matriz triangular y diagonal.
ii. La adición y multiplicación por un escalar y la multiplicación de matrices.
iii. La matriz identidad y la matriz de ceros.
iv. La transpuesta de una matriz y la matriz simétrica.
v. La matriz idempotente y las matrices ortogonales.
vi. Combinaciones lineales de vectores e independencia lineal.
vii. La traza y el rango de una matriz.
viii. El determinante de una matriz.
ix. Valores propios.
x. La matriz inversa.

[2] En estas notas cuando empleemos el término vector nos referiremos a un vector columna, a menos que se especifique lo contrario.

xi. Elementos del cálculo matricial.

xii. Resultados especiales para un curso de econometría.

xiii. Operaciones matriciales empleando Microsoft Excel.

1.1 Matriz triangular y diagonal.

Antes de definir algunas matrices especiales que serán útiles para nosotros, es importante definir el concepto de diagonal principal de una matriz. La diagonal principal de una matriz cuadrada A, es el conjunto de elementos cuya posición corresponden a la misma fila y columna. En otras palabras, son los elementos que se encuentran formando una "diagonal" entre la esquina superior izquierda y la esquina inferior derecha de la matriz. Por ejemplo, sea la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 11 & 10 & 8 \end{bmatrix}$. La diagonal principal de la matriz C está dada por el conjunto $\{1,3,8\}$.

En general, sea A una matriz cuadrada representada por:

$$A = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right] = \left[a_{ij} \right]_{i=1,\ldots n;\, j=1,\ldots,n}$$

Entonces, la ***diagonal principal*** está dada por el conjunto de elementos $\{a_{ii}\}_{i=1,\ldots,n}$.

Ahora, podemos definir el concepto de una matriz triangular superior/inferior. Una matriz cuadrada es considerada una ***matriz superior/inferior*** si todos los elementos por debajo/encima de la diagonal principal son cero. Por ejemplo, la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular superior.

Si una matriz es al mismo tiempo una matriz triangular superior y triangular inferior, entonces se conoce como una matriz diagonal. En otras palabras, una ***matriz diagonal*** es una matriz cuyos elementos por fuera de la diagonal principal son cero. Es decir, A es una matriz diagonal si $A=\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$. Una matriz diagonal se puede escribir de forma corta de la siguiente manera $A=diag\left(a_{11},a_{22},...,a_{nn}\right)$.

1.2 Adición, multiplicación por un escalar y multiplicación de matrices.

Sean dos matrices A y B, cada una de dimensiones $n\times m$ (conformes para la suma), entonces la adición de estas dos matrices corresponde a una matriz con dimensiones $n\times m$, cuyos elementos son iguales a la suma de los elementos correspondientes de las matrices A y B. Es decir:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{i=1,\dots n;\, j=1,\dots,m} \end{aligned} \tag{A2.4}$$

Si las matrices a sumar no tienen la mismas dimensiones, entonces la operación no se puede efectuar y se dice que las matrices no cumplen la condición de conformidad.

Ejemplo 1

Suponga que contamos con 3 matrices $(E, F \text{ y } M)$ que corresponden a la información para los tres primeros meses del año de las ventas, costos y utilidades mensuales (columnas) para dos empresas (filas).

$$E = \begin{bmatrix} 600 & 250 & 350 \\ 550 & 180 & 400 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 650 & 330 & 250 \\ 600 & 270 & 400 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{bmatrix} 580 & 270 & 350 \\ 625 & 350 & 410 \end{bmatrix}$$

Encuentre el valor de las ventas, costos y utilidades para el primer trimestre.

Respuesta: Las ventas, costos y utilidades trimestrales para las dos empresas son:

$$E + F + M = \begin{bmatrix} 1830 & 850 & 950 \\ 1775 & 800 & 1210 \end{bmatrix}$$

La suma de matrices posee varias propiedades similares a las de la suma de escalares. A continuación se exponen estas propiedades:

- Propiedad Conmutativa: $A + B = B + A$
- Propiedad Asociativa: $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$

Antes de avanzar un poco más, note que si se suma dos veces la matriz A, se obtiene:

$$\begin{aligned} A + A &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_{11} & \cdots & 2a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_{n1} & \cdots & 2a_{nm} \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \\ &= 2 \cdot \left[a_{ij} \right]_{i=1,\dots n;\, j=1,\dots,m} = 2 \cdot A \end{aligned} \qquad \text{(A2.5)}$$

Es decir, el resultado de sumar dos veces la matriz A es igual a cada uno de los elementos de la matriz A multiplicado por dos. Así es fácil mostrar que en general:

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.6)}$$

Donde λ es un escalar.

Ejemplo 2 (Continuación)

Suponga que quiere calcular $E - F + 2M$.

Respuesta: Tenemos que:

$$E - F + 2M = E + (-1)F + 2M =$$
$$= \begin{bmatrix} 600 & 250 & 350 \\ 550 & 180 & 400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -650 & -330 & -250 \\ -600 & -270 & -400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 580 & 2 \cdot 270 & 2 \cdot 350 \\ 2 \cdot 625 & 2 \cdot 350 & 2 \cdot 410 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1110 & 460 & 800 \\ 1200 & 610 & 820 \end{bmatrix}$$

Finalmente, consideremos la multiplicación de dos matrices. En este caso, al contrario de la multiplicación entre escalares, las matrices a multiplicar deben cumplir una condición de conformidad para que el producto exista. Esta condición es que el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz. Es decir, dadas dos matrices A y B con dimensiones $n_A \times m_A$ y $n_B \times m_B$, respectivamente; el producto $A \cdot B$ cumple la condición de conformidad si y solamente si $m_A = n_B$. En caso de que esta condición se cumpla, el producto estará dado por

$$A \cdot B = \left[c_{ij} \right]_{i=1,\dots n;\, j=1,\dots,m} \qquad \text{(A2.7)}$$

y $c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}$. La Figura 1 ilustra el uso de esta fórmula.

La multiplicación de matrices presenta varias propiedades, pero antes es importante recalcar que la propiedad conmutativa de la multiplicación para los escalares no se cumple para las matrices (aún si este producto cumple la condición de conformidad). Es decir, $A \cdot B \neq B \cdot A$ en caso de que ambos productos estén definidos. Por lo que es importante tener en cuenta el orden en que se multiplican las matrices, y hablaremos de pre-multiplicar o post-multiplicar por una matriz, cuando se multiplica una matriz por la izquierda o por la derecha, respectivamente.

Las siguientes son las propiedades que se cumplen para la multiplicación de matrices:

- Propiedad Asociativa: $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Propiedad Distributiva: $C(A+B) = C \cdot A + C \cdot B$ y $(A+B)C = A \cdot C + B \cdot C$

Un caso especial se presenta cuando consideramos una matriz diagonal. Sea A una matriz diagonal de orden n, entonces tenemos que $A \cdot A = A^2 = \left[\left(a_{ij} \right)^2 \right]_{i=1,\ldots n;\, j=1,\ldots n}$. Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, tendremos que $A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$.

En general, si A es una matriz diagonal de orden n, tendremos que $A^{\alpha} = \left[\left(a_{ij} \right)^{\alpha} \right]_{i=1,\ldots n;\, j=1,\ldots n}$. Es decir, cuando se eleva una matriz diagonal a la α, el resultado es una matriz diagonal, cuyos elementos en la diagonal principal son iguales a los correspondientes elementos de la diagonal principal de la matriz original elevados cada uno a la α.

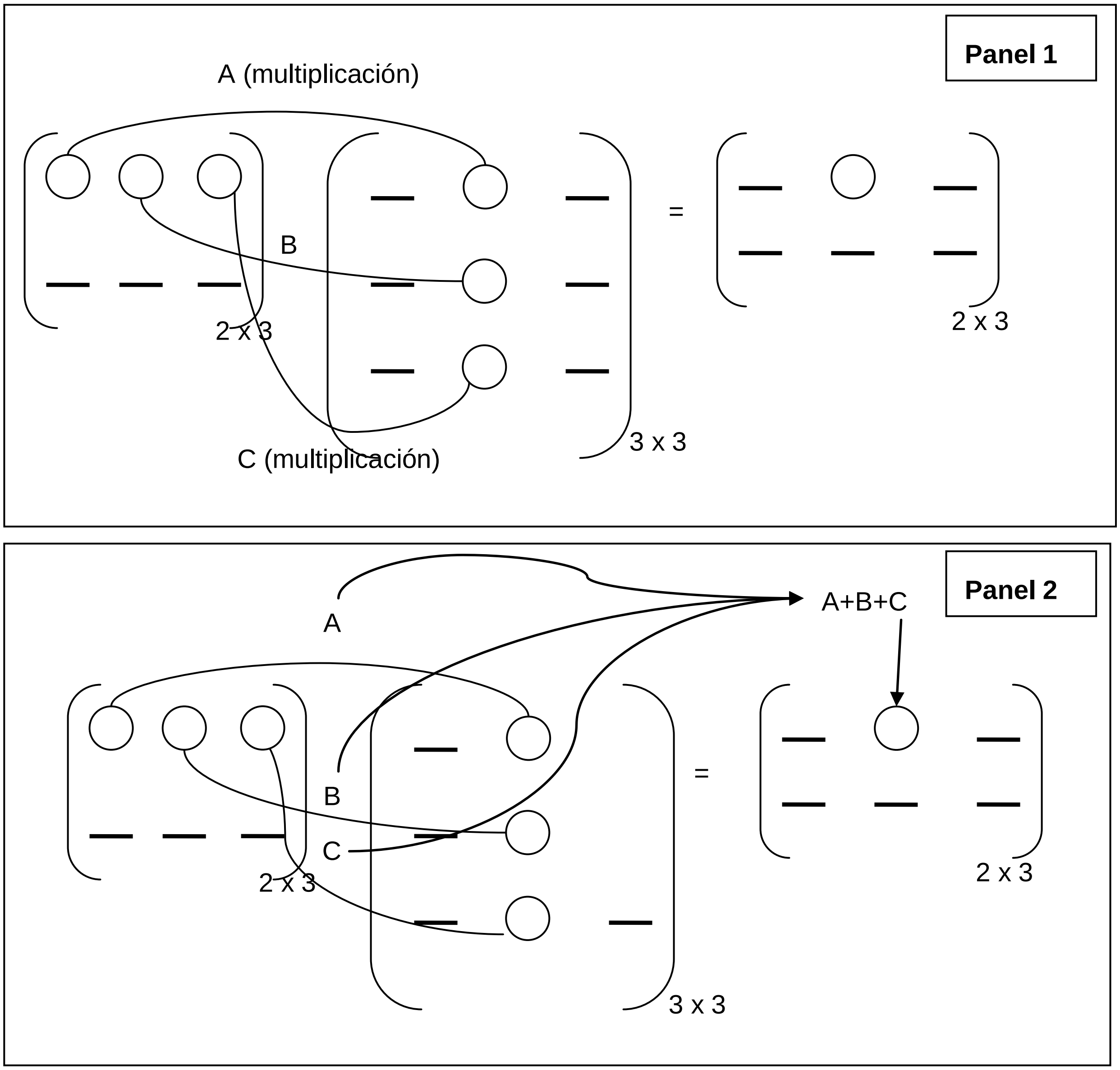


Figura 1 Esquema de la multiplicación de Matrices. Cada una de las parejas unidas por líneas en el Panel 1 de la figura se multiplican entre sí. Posteriormente, se suman dichos productos para obtener el correspondiente elemento de la matriz final, como se observa en el Panel 2.

Ejemplo 3

Dadas las siguientes $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 6\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$ matrices, encuentre $A\cdot B$.

Respuesta: Inicialmente, es importante chequear que se cumpla la condición de conformidad. En este caso el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B. Así, el producto $A\cdot B$ está definido.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1\cdot1)+(2\cdot2) & (1\cdot2)+(2\cdot4) & (1\cdot1)+(2\cdot1)\\ (4\cdot1)+(3\cdot2) & (4\cdot2)+(3\cdot4) & (4\cdot1)+(3\cdot1)\\ (1\cdot1)+(6\cdot2) & (1\cdot2)+(6\cdot4) & (1\cdot1)+(6\cdot1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 10 & 3\\ 10 & 20 & 7\\ 13 & 26 & 7\end{bmatrix}$$

Noten que $B\cdot A$ también está definido.

Es importante anotar que las matrices, así como los escalares, pueden ser sumadas, restadas o multiplicadas (siempre y cuando el producto esté definido). Pero la división para las matrices no es posible.

Si consideramos dos números (escalares) a y b, entonces el cociente $\frac{a}{b}$ (siempre y cuando $b\neq 0$) se puede expresar como $ab^{-1}=b^{-1}a$, donde b^{-1} se conoce como el recíproco o inverso de b. Debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación de escalares, la expresión $\frac{a}{b}$ se puede emplear sin ningún problema para expresar ab^{-1} o $b^{-1}a$.

En el caso de las matrices esto es diferente. Debe ser claro que aunque los productos AB^{-1} y $B^{-1}A$ estén definidos[3], estos dos productos usualmente son diferentes. De manera que, la expresión A/B no puede emplearse porque es ambigua, es decir, no es

[3] B^{-1} denota la inversa de la matriz B en caso de que exista. Este concepto será repasado más adelante.

claro si esta expresión se refiere a AB^{-1} o $B^{-1}A$. Y peor aún, es posible que alguno de estos productos no exista. Así, cuando manipulamos matrices, es mejor evitar el uso de la expresión A/B (matriz A dividida por la matriz B). (Chiang (1996))

1.3 La matriz identidad y la matriz de ceros.

La ***matriz identidad*** es una matriz diagonal especial, cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a uno. Es decir, la matriz identidad es una matriz con unos en la diagonal principal y ceros en las otras posiciones. La matriz identidad se denota por I_n, donde n corresponde al número de columnas y filas de la matriz (orden de la matriz).Formalmente,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \text{(A2.8)}$$

La matriz identidad tiene la propiedad de ser el módulo de la multiplicación de matrices. Es decir, $I_k \cdot A_{k \times g} = A$ y $A_{k \times g} \cdot I_g = A$.

Un caso especial se produce cuando $A_{k \times g} \cdot I_g = I_g$, donde tiene que ser cierto que $A_{k \times g} = I_g$. ¿Por qué?

Otra matriz importante es la matriz de ceros, cuyos elementos son iguales a cero y se denota por $0_{n \times m}$. Esta matriz no necesariamente debe ser cuadrada y tiene la siguiente propiedad: $A_{n \times m} + 0_{n \times m} = 0_{n \times m} + A_{n \times m} = A$.

1.4 La transpuesta de una matriz y la matriz simétrica.

La transpuesta de una matriz cualquiera A es una matriz cuyas filas corresponden a las columnas de la matriz original A; o lo que es lo mismo, es una matriz cuyas columnas corresponden a las filas de la matriz A. La transpuesta de una matriz A se denota por A^T o A'.

Por ejemplo, si $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 11 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ tendremos que $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Las propiedades de la operación de transposición son las siguientes:

- Transpuesta de la transpuesta: $\left(A^T\right)^T = A$
- Transpuesta de una suma: $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$
- Transpuesta de un producto: $\left(A \cdot B\right)^T = B^T \cdot A^T$

Cuando $A^T = A$, se dice que A es una ***matriz simétrica***. . En otras palabras, una matriz simétrica es una matriz cuya transpuesta es igual a ella misma. Por ejemplo, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica, pues $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = D$. Generalmente, por convención, las matrices simétricas son escritas omitiendo los elementos por debajo de la diagonal principal. Para nuestro ejemplo tendremos que la matriz D se puede reescribir de la siguiente forma $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 3 & 5 \\ & & 8 \end{bmatrix}$. Cuando se emplea esta notación se da por entendido que se trata de una matriz simétrica.

1.5 Matriz idempotente y matrices ortogonales

Una matriz cuadrada A se denomina ***idempotente*** si y solamente si $A \cdot A = A$. Un ejemplo de matriz idempotente es la matriz identidad. Por otro lado, dos matrices A y B son ***matrices ortogonales*** si y solamente si $A \cdot B = 0$.

1.6 Combinaciones lineales de vectores e independencia lineal

Dado un conjunto de vectores (fila o columna) $v_1, v_2, ..., v_k$ y un conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ para $k = 1, 2, ..., K$, una combinación lineal de los vectores está dada por $c = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i v_i$.

Ejemplo 4

Dados los siguientes 3 vectores y 3 escalares, encuentre 4 diferentes combinaciones lineales de los vectores.

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha = 2, \beta = 1 \text{ y } \gamma = -1$$

Respuesta: A partir de estos vectores y escalares podemos encontrar las siguientes combinaciones lineales:

$$c_1 = \alpha v + \beta w + \gamma z = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \beta v + \alpha w + \gamma z = 1\begin{bmatrix}2\\3\\5\\6\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}4\\6\\1\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}5\\10\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\\7\\5\end{bmatrix}$$

$$c_3 = \beta v + \gamma w + \alpha z = (-1)\begin{bmatrix}2\\3\\5\\6\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}4\\6\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}5\\10\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\19\\-3\\-5\end{bmatrix}$$

$$c_4 = \gamma v + \beta w + \alpha z = (-1)\begin{bmatrix}2\\3\\5\\6\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}4\\6\\1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}5\\10\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\23\\-4\\-4\end{bmatrix}$$

Ahora tenemos todos los elementos para definir el concepto de dependencia lineal. Un conjunto de vectores será ***linealmente dependiente*** si al menos uno de los vectores puede expresarse como una combinación lineal de los otros. Así, por ejemplo, el conjunto de vectores $c, v_1, v_2, ..., v_k$ (definidos anteriormente), será dependiente linealmente, pues por definición el vector c es una combinación lineal de los demás vectores ($c = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i v_i$).

Ahora bien, un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, ..., v_K\}$ se considera ***linealmente independiente*** si y solamente si los únicos valores de los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ que cumplen la condición

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_K v_K = 0 \qquad \text{(A2.9)}$$

son $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_K = 0$. En otras palabras, ningún vector del conjunto se puede expresar como combinación lineal de otro u otros vectores que pertenecen al mismo conjunto.

1.7 La Traza y el rango de una matriz

La ***traza*** de una matriz cuadrada A es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$. Es decir:

$$tr\left(A_{n\times n}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \quad \text{(A2.10)}$$

Una de las principales propiedades de la traza es: $tr(ABC)=tr(CBA)=tr(BCA)$. Por otro lado, el ***rango*** de una matriz A es el número de filas o columnas linealmente independientes y se denota por $ran(A)$. Si se trata de una matriz no simétrica de dimensiones $n\times m$, entonces tendremos que $ran(A)\leq Min(n,m)$[4].

Si el rango de una matriz A es igual al número de sus columnas, entonces se dice que la matriz A tiene ***rango columna completo***. En caso de que el rango de la matriz A sea igual al número de filas, se dice que la matriz A tiene ***rango fila completo***. Para el caso de una matriz cuadrada, si el rango de la matriz es igual al número de filas y por tanto al número de columnas, se dice que la matriz tiene ***rango completo***.

Ejemplo 5

Dada la matriz $D=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5 & 12\\ 3 & 6 & 10 & 23\\ 5 & 1 & 0 & -4\\ 6 & 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$, encuentre su rango.

Respuesta: En el ejemplo anterior vimos que la última columna (vector columna) se puede construir como una combinación lineal de las primeras tres columnas. Además se puede comprobar rápidamente que las tres primeras filas son linealmente independientes entre sí. Así, $ran(D)=3$

[4] Siendo un poco más rigurosos se debería hablar del rango columna (número de columnas linealmente independientes) y del rango fila (número de filas linealmente independientes). Pero es fácil demostrar que el rango columna y el rango fila de una matriz es el mismo, por tanto, podemos hablar sin riesgo a ambigüedades del rango de una matriz.

Algunos resultados útiles del rango son:

- $ran(AB) \leq \min(ran(A), ran(B))$
- Si A tiene dimensiones $n \times m$ y B es una matriz cuadrada de rango m, entonces $ran(AB) = ran(A)$
- $ran(A) = ran(A^T A) = ran(AA^T)$

1.8 Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada A, representado por $\det(A)$ o $|A|$, es un escalar asociado de manera unívoca con esta matriz. Para una matriz 2×2, el determinante está dado por $\det(A) = |A| = \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Para una matriz de un orden superior, el cálculo del determinante es un poco más complejo.

Antes de entrar en el detalle del cálculo, definamos dos conceptos importantes. La ***matriz menor,*** asociada al elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A de orden n, denotada por M_{ij}, es la matriz cuadrada de orden $n-1$ obtenida al eliminar la *i*-ésima fila y la *j*-ésima columna de A. (Ver Figura 2). El ***menor del elemento*** a_{ij} es el determinante de la matriz menor M_{ij}; es decir $|M_{ij}|$. Y el ***cofactor*** del elemento a_{ij}, expresado por C_{ij}, corresponde a $C_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$.

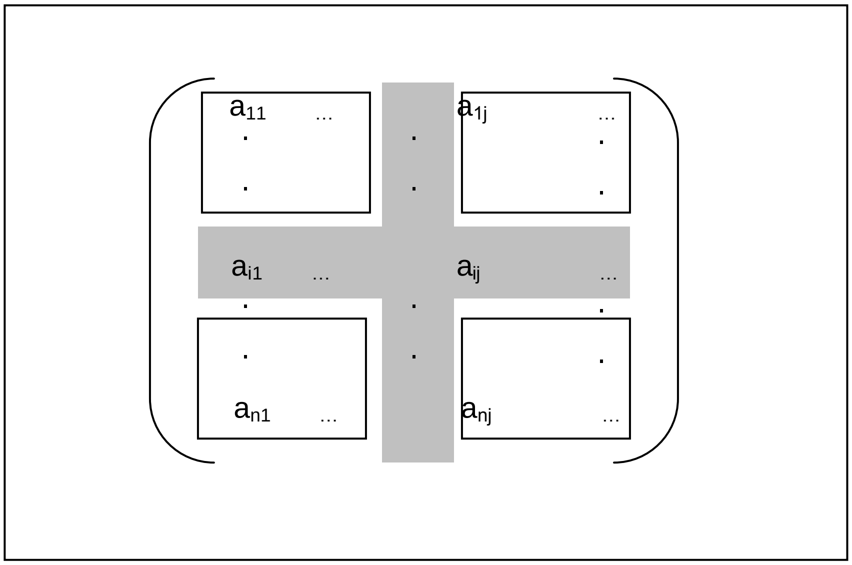


Figura 2 Esquema de la Matriz menor asociada al elemento *a*a_{ij}. La matriz menor asociada al elemento a_{ij}, se forma eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna (columna y fila sombreadas).

Ahora bien, el determinante de una matriz de orden n puede ser calculado, a partir de cualquier columna o fila, de la siguiente manera:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \text{(empleando la i-ésima fila)} \qquad \text{(A2.11)}$$

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \text{(empleando la j-ésima columna)}$$

Algunas propiedades útiles de la matriz son:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $|A^{-1}| = |A|$
- $|AB| = |A||B|$
- Si el producto de una fila de A por un escalar se suma a una fila de A, entonces el determinante de la matriz resultante es igual a $\det(A)$.

- El intercambio de dos filas o dos columnas, sin importar cuales sean, alterará el signo, pero no el valor numérico, del determinante.
- $\det(\lambda A_n) = \lambda^n \det(A)$ donde λ es un escalar
- $\det(A_n) = 0$ si y solamente si $ran(A) < n$. Es decir, si $\det(A_n) = 0$, entonces tiene que ser cierto que existe una columna (o fila) que es combinación lineal de una, o más de una columna (fila), de A.
- Si $\det(A_n) = 0$, entonces A se conoce como una ***matriz singular***. En caso contrario (i.e. $\det(A_n) \neq 0$) se dice que A es una ***matriz no singular***.
- Si A es una matriz diagonal denotada por $A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, entonces $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}$.

Ejemplo 6

Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, encuentre su determinante.

Respuesta: El determinante puede ser calculado empleando cualquier fila o columna, en este caso será más fácil emplear la segunda fila, pues tiene dos elementos iguales a cero. Así, tendremos:

$$|D| = \left\| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -2 & 8 \end{bmatrix} \right\| = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ -7 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Note que esto implicará el cálculo de dos determinantes de orden 3. Esta operación se puede simplificar aún más si “creamos” más ceros en la segunda fila de la matriz D. Por ejemplo, si multiplicamos la columna 3 por -2 y sumamos este producto a la columna 1 tendremos que:

$$|D| = \left\| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -2 & 8 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & -2 & 8 \end{bmatrix} \right\| = 1(-1)^{2+3} \left\| \begin{bmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \right\|$$

Ahora, multiplicando la segunda columna por -4 y sumándola a la tercera columna se obtendrá:

$$|\mathrm{D}| = \left\| \begin{bmatrix} -4 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \right\| = -1(-1^{2+2}) \left\| \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \right\| = -1\left[\left((-4)\cdot(-4) \right) - \left((-3)\cdot(9) \right) \right]$$

$$= -(16+27) = -43$$

1.9 Valores propios

Los valores propios ("eigen values" en inglés), también conocidos como raíces características de una matriz cuadrada A_n son los escalares λ que satisfacen

$$|A - \lambda I_n| = 0. \tag{A2.12}$$

Estos valores propios son importantes porque en muchos casos facilitan ciertos cálculos. En especial tenemos los siguientes resultados que son significativos para un curso introductorio de econometría:

1. $\det(A_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. El rango de cualquier matriz A es igual al número de valores propios diferentes de cero.

Ejemplo 7

Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre sus valores propios, su rango y su determinante.

Respuesta: Para encontrar los valores propios de la matriz D, se requiere solucionar la siguiente ecuación: $|D - \lambda I_2| = 0$. Es decir:

$$\left| \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda I_2 \right| = \left| \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(5-\lambda)(4-\lambda) - 2(1) = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

Las dos soluciones son $\lambda_1 = 6$ ó $\lambda_2 = 3$. Así, los valores propios de la matriz D son 6 y 3. Por tanto, $ran(D) = 2$ y $\det(D) = 6 \cdot 3 = 18$.

1.10 La Matriz inversa.

La matriz inversa de la matriz cuadrada A_n es una matriz cuadrada de igual orden tal que

$$BA_n = I_n. \tag{A2.13}$$

Y se denota como A^{-1}, es decir $B = A^{-1}$. Además, si se post-multiplica la matriz A_n por su inversa, también se obtendrá la matriz identidad. En otras palabras, la matriz inversa además cumple que $A_n A_n^{-1} = I_n$.

Pero, ¿cómo encontrar la matriz inversa de una matriz A_n? Primero es importante recordar que no todas las matrices cuadradas poseen inversa. De hecho, sólo aquellas matrices cuyas columnas y filas son linealmente independientes entre sí tendrán inversa. En otras palabras, una matriz singular ($\det(A) = 0$) no tendrá matriz inversa.

Existen diferentes métodos para encontrar la matriz inversa de una matriz no singular, pero aquí sólo repasaremos dos métodos. El primer método será emplear la transpuesta de la matriz de cofactores conocida como la matriz adjunta ($Adj(A)$). La matriz inversa de una matriz A_n está dada por la siguiente fórmula

$$A_n^{-1} = \frac{1}{|A_n|} Adj(A_n). \tag{A2.14}$$

Ejemplo 8

Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre su inversa.

Respuesta: Para emplear la fórmula (A2.14), primero debemos calcular tanto el determinante como la matriz adjunta de D. Así, tenemos que $|D| = -2$ y $Adj(D) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Aplicando la fórmula, la inversa de D esta dada por

$$D^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

El segundo método que consideraremos es el método de reducción de Gauss-Jordan. En algunas ocasiones, este método resulta menos tedioso que aplicar la fórmula dada en (A2.14). Dada una matriz cuadrada A_n, este método parte de considerar la siguiente matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & & 1 \end{array}\right] = \left[A_n \middle| I_n\right]$$

Posteriormente, por medio de operaciones de filas podemos reducir la matriz A a la matriz identidad.

Así tendremos que:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & d_{m1} & \cdots & d_{mn} \end{array}\right] = \left[I_n \middle| A^{-1}\right].$$

Al final de las transformaciones, obtendremos la inversa de la matriz original a la derecha.

Ejemplo 9

Dada la matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre su inversa por el método de reducción de Gauss-Jordan.

Respuesta: Primero necesitamos armar la matriz aumentada. Es decir

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora necesitamos manipular esta matriz de tal forma que a la izquierda tengamos la matriz inversa. Para esto, intercambiemos la primera fila con la segunda.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Posteriormente, sumemos la fila uno multiplicada por (-2) a la fila 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Finalmente, sumemos la fila 2 multiplicada por (-4) a la fila 1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Por tanto, $D^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Un resultado especial, que nos será útil, es la inversa de una matriz diagonal. Ésta es una de las inversas más fáciles de calcular. En general tenemos que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.15)}$$

Finalmente, repasemos rápidamente algunas propiedades de las matrices inversas.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
- Si A es una matriz simétrica, entonces A^{-1} también será simétrica

1.11 Elementos de cálculo matricial.

Consideremos la siguiente función cuyo dominio es en los reales ($\mathbb{R}$) y su rango pertenece a $\mathbb{R}^n$: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\underset{\sim}{x})$. El vector de derivadas parciales de $f(\underset{\sim}{x})$ es conocido como el ***gradiante*** o vector gradiante y está definido de la siguiente manera:

$$g = g(\underset{\sim}{x}) = \frac{\partial f(\underset{\sim}{x})}{\partial \underset{\sim}{x}} = \begin{bmatrix} dy/dx_1 \\ dy/dx_2 \\ \vdots \\ dy/dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{A2.16}$$

es importante tener en cuenta que el gradiante es un vector columna y no un vector fila. El elemento *i*-ésimo del gradiante se interpreta como la pendiente de $f(\underset{\sim}{x})$ con respecto al plano x_i; en otras palabras, es el cambio en $f(\underset{\sim}{x})$ dado un cambio en x_i teniendo los otros elementos del vector $\underset{\sim}{x}$ constantes.

La segunda derivada de $f(\underset{\sim}{x})$ está dada por una matriz denominada la matriz ***Hessiana*** que es calculada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \partial^2 y/\partial x_1 \partial x_1 & \partial^2 y/\partial x_1 \partial x_2 & \cdots & \partial^2 y/\partial x_1 \partial x_n \\ \partial^2 y/\partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 y/\partial x_2 \partial x_2 & \cdots & \partial^2 y/\partial x_2 \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2 y/\partial x_n \partial x_1 & \partial^2 y/\partial x_n \partial x_2 & \cdots & \partial^2 y/\partial x_n \partial x_n \end{bmatrix} \\ &= \left[f_{ij} \right] = \frac{\partial^2 y}{\partial \underset{\sim}{x} \partial \underset{\sim}{x}^T} \end{aligned} \tag{A2.17}$$

La matriz Hessiana es cuadrada y simétrica, gracias al teorema de Young.

Algunas derivadas especiales que serán empleadas a lo largo de un curso introductorio de econometría son:

- $\frac{\partial\left(\underset{\sim}{x}^T \underset{\sim}{a}\right)}{\partial \underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{a}$, donde $\underset{\sim}{a}$ es un vector columna
- $\frac{\partial\left(\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}\right)}{\partial \underset{\sim}{x}} = \left(A + A^T\right)\underset{\sim}{x}$, donde A es cualquier matriz cuadrada
- $\frac{\partial\left(\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}\right)}{\partial \underset{\sim}{x}} = 2A\underset{\sim}{x}$, donde A es una matriz cuadrada simétrica[5].

Ahora si consideramos funciones cuyo rango está en los $\mathbb{R}^n$, tenemos los siguientes resultados que nos serán de gran utilidad:

- $\frac{\partial\left(A \underset{\sim}{x}\right)}{\partial \underset{\sim}{x}} = A^T$, donde A es cualquier matriz tal que el producto $A\underset{\sim}{x}$ está definido.
- $\frac{\partial\left(\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}\right)}{\partial A} = \underset{\sim}{x}^T \underset{\sim}{x}$, donde A es cualquier matriz cuadrada.
- $\frac{\partial\left(\ln\left(A\right)\right)}{\partial A} = \left(A^{-1}\right)^T$, donde A es cualquier matriz cuadrada no-singular.

1.12 Resultados especiales para un curso de econometría

Antes de finalizar, es importante resaltar varios resultados importantes que serán empleados a lo largo de un curso introductorio de econometría. Sean las matrices

---

[5] Noten que este resultado es intuitivo; si $f\left(x\right) = x^2$ entonces $f'\left(x\right) = 2x$, recuerden que $\underset{\sim}{x}^T \underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ y por tanto es el equivalente matricial a una expresión cuadrática escalar. Así la analogía entre el resultado escalar y el matricial resulta natural.

$$X_{nxk} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \text{ y } y_{nx1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Entonces, tendremos que :

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{3i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \\ & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{3i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{ki} \\ & & \sum_{i=1}^{n} X_{3i}^2 & \ddots & \sum_{i=1}^{n} X_{3i} X_{ki} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \end{bmatrix} \quad \text{(A2.18)}$$

y adicionalmente

$$y^T y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ . \quad \text{(A2.19)}$$

Finalmente, tenemos que

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{3i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{ki} \end{bmatrix} \quad \text{(A2.20)}$$

Dato Interesante

Como se mencionó al inicio de esta nota, una de las aplicaciones de las matrices es la encriptología, es decir, el proceso de cifrar mensajes. A continuación veremos una breve aplicación de las matrices a la codificación de mensajes.

Considere una matriz fija A invertible (no singular). Entonces, podemos convertir el mensaje que se desea codificar en una matriz B, tal que AB satisfaga la condición de conformidad. Así, se puede enviar el mensaje generado por AB. El receptor del mensaje necesita conocer A^{-1} para decodificar el mensaje, pues $A^{-1}AB = B$.

En especial, consideremos la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ y su correspondiente inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 57 & -5 & 46 \\ 11 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ahora considere el mensaje "Estamos en Cali" que se puede expresar de la siguiente manera (note que el receptor del mensaje también debe conocer la codificación adecuada de las letras)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} E & s & t & a & m & o & s & & e & n & & C & a & l & i \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 8 & 4 & 0 & 3 & 7 & 0 & -1 & 1 & 9 & -2 \end{array}$$

Así, podemos crear la siguiente matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que $AB = \begin{bmatrix} 37 & 17 & -6 & 5 & 31 \\ 82 & 29 & -3 & 94 & 51 \\ -37 & -18 & 7 & 4 & -33 \end{bmatrix}$. Por tanto, el mensaje encriptado a enviar sería $\{37 , 17 , -6 , 5 , 31 , 82, ...\}$. El receptor puede saber cuántas filas tendrá la matriz que le es enviada. Y podrá fácilmente reconstruir la matriz AB. De tal forma que pre-multiplicando por A^{-1} el mensaje recibido se obtendrá el mensaje deseado.

Ejercicio: Intente encriptar el mensaje "Tengo que repasar álgebra matricial"

1.13 Operaciones matriciales empleando Microsoft Excel

Las hojas de cálculo, y en especial Excel, permiten realizar la mayoría de las operaciones matriciales discutidas anteriormente. En esta última sección se describirá rápidamente como realizar algunas de las operaciones matriciales más sencillas empleando Excel, pero antes es importante aclarar que Excel tal vez no sea el software más eficiente para realizar operaciones matriciales.[6]

En general, Excel puede entender un conjunto de celdas adyacentes como un vector (fila o columna) o como una matriz. Esto permite que las operaciones matriciales elementales sean muy fáciles de realizar en Excel.

El determinante de una matriz (cuadrada) se puede encontrar fácilmente empleando la función "*MDETERM(***Matriz***)*", la transpuesta de una matriz o un (vector fila o columna) se puede calcular con la función "*TRANSPONER(***Matriz***)*". La multiplicación se realiza con la función "*MMULT(***Matriz1;Matriz2***)*" y la inversa con "*MINVERSA(***Matriz***)*".

Para emplear cualquier tipo de función que involucre matrices hay que ser muy cuidosos con el uso de las funciones, pues a diferencia de la mayoría de funciones de Excel en las

[6] Si se desean realizar cálculos que involucren matrices existen varias opciones de software tanto gratuito como licenciado. Por ejemplo Matlab es tal vez el software más eficiente para manipular y realizar cálculos de matrices. Este software requiere de una licencia que en general es relativamente costosa. Una opción en el mundo del software de uso libre es R (www.r-project.org) que permite la manipulación de grandes volúmenes de información. No obstante, en estas notas sólo nos referiremos a Excel.

cuales el resultado corresponde a una sola celda, en este caso el resultado corresponderá a mas de una. Por ejemplo, al multiplicar una matriz de dimensiones 4x5 por otra de 5x10 se obtendrá una de dimensiones 4x10; lo cual corresponde a 40 celdas. Por esta razón, siempre será necesario seleccionar las celdas en la cual Excel deberá poner los resultados del cálculo.

Una vez la región esté seleccionada, se puede digitar la función que se desea emplear. Cuando este lista la función y la selección de las respectivas matrices sobre las que se efectuará la operación se deberá oprimir al mismo tiempo las teclas “Shift” , “Ctrl” y “Enter”. Si no se oprimen estas tres teclas al mismo tiempo, Excel no entenderá que el resultado de la función se debe colocar en el rango seleccionado.

Una forma de chequear si la fórmula que incluye matrices fue bien introducida es mirar que la función automáticamente se encuentre entre corchetes. Por ejemplo, al multiplicar dos matrices y hacer el procedimiento correctamente, al parar el cursos sobre una de las celdas donde debe aparecer el resultado usted deberá ver algo como “{MMULT(Matriz1;Matriz2)}”.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra el uso de estas funciones.

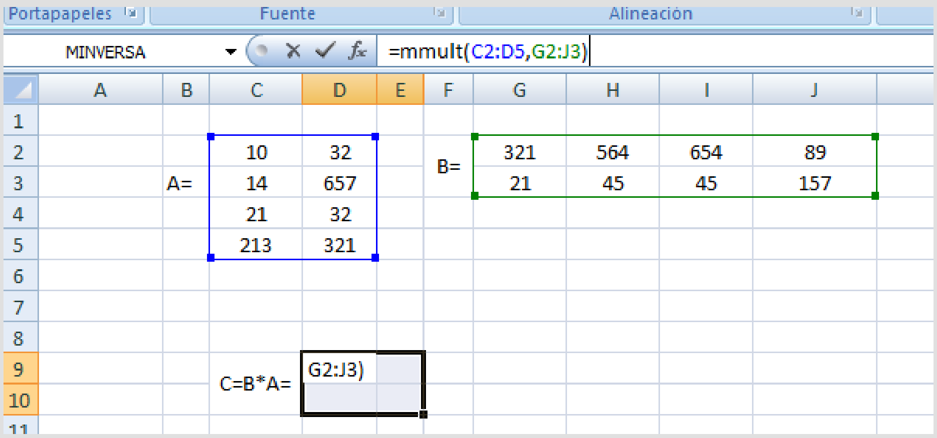
Ejemplo 10

Considere las siguientes dos matrices:

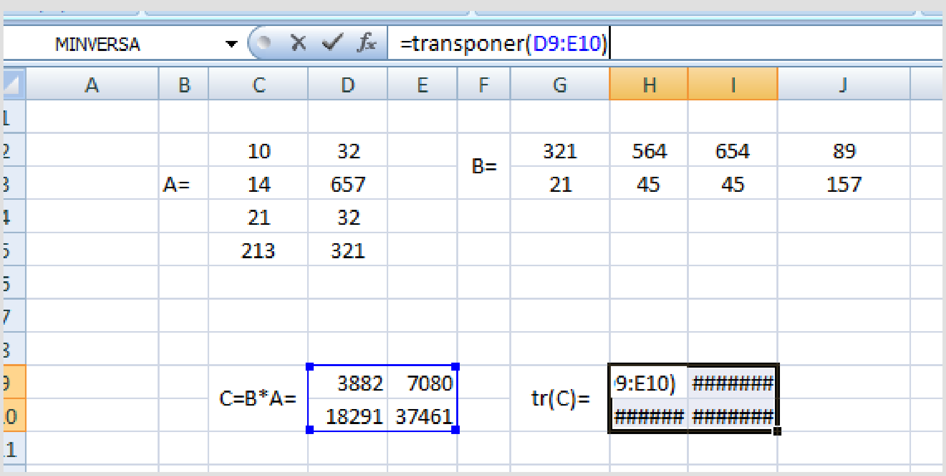
$$A=\begin{bmatrix}10 & 32\\ 14 & 657\\ 21 & 32\\ 213 & 321\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}321 & 564 & 654 & 89\\ 21 & 45 & 45 & 157\end{bmatrix}.$$

Encuentre $C=B\bullet A$, C^T, $\det(C)$ y C^{-1}

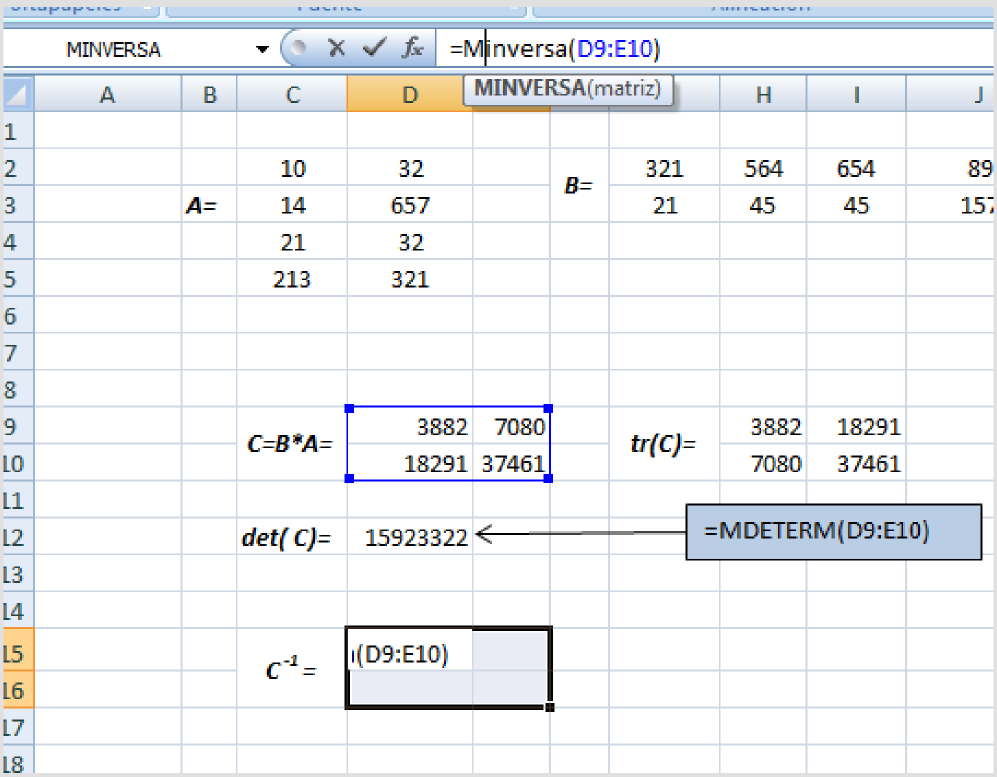
Respuesta: Supongamos que la información de la matriz A y B están entre las celdas C2 a D5 y G2 a I3 (ver pantallazo). Dado que dicho producto tendrá dimensiones 2X2, tendremos que seleccionar una región de 2 filas por 2 columnas; por ejemplo, de la celda D9 a la E10. Una vez estas celdas están seleccionadas se puede escribir la fórmula "=MMULT(C2:D5,G2:J3)" y oprimir al mismo tiempo las teclas "Shift" , "Ctrl" y "Enter".



Para encontrar la transpuesta de C debemos seleccionar las celdas donde queremos que aparezca el resultado (por ejemplo celdas H9 a I10) y emplear la fórmula "=TRANSPONER(D9:E10)" y presionar al mismo tiempo las teclas "Shift" , "Ctrl" y "Enter" (ver siguiente pantallazo).



El determinante de C al ser un escalar, se puede calcular escribiendo en una celda la fórmula "=MDETERM(D9:E10)". Finalmente para obtener la inversa de C, debemos seleccionar las celdas donde queremos que aparezca el resultado (por ejemplo celdas D15 a E16) y emplear la fórmula =Minversa(D9:E10)" y presionar al mismo tiempo las teclas “Shift” , “Ctrl” y “Enter” (ver siguiente pantallazo).



1.14 Ejercicios.

1. Muestre que $(I_n)^K = I_n$, para todo $k \geq 1$.
2. Demuestre que para cualquier matriz diagonal A, se tiene que $A^0 = I$.
3. Demuestre, para una matriz cuadrada de orden 3, que si una de las columnas es combinación lineal de otra columna el determinante de dicha matriz es cero.
4. Muestre que en general para cualquier matriz cuadrada, si una columna es combinación lineal de de otra columna entonces el determinante de dicha matriz es cero.
5. Demuestre que $ran(AB) \leq \min(ran(A), ran(B))$.*
6. Demuestre que $|A^k| = |A|^k$
7. Encuentre la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Muestre que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

Lectura Sugerida

- Chiang, Alpha C. 1996. *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*: McGraw-Hill. Capítulo 3 y 4.

Respuestas a Ejercicios seleccionados.

5. Sea $C = AB$, donde cada $c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}$. Así, cada columna de C es una combinación lineal de las columnas de A. (Es decir C está en el espacio columna de A). Entonces, será posible que las columnas de C generen el espacio de A, pero no es posible que las columnas de C generen un espacio de mayor dimensión. Entonces, en el mejor de los casos estas columnas pueden generar el mismo espacio columna generado por A, es decir el rango de C no puede exceder el rango columna de A. Empleando el mismo argumento para las filas de C que son una combinación lineal de las filas de B. Así, por la misma razón expuesta anteriormente, C no puede exceder el rango fila de la matriz B . Como el rango fila y el rango columna siempre son iguales, entonces tenemos que $ran(AB) \leq \min(ran(A), ran(B))$.

Q.E.D.