

Nombre: \_\_\_\_\_ Código : \_\_\_\_\_

1. (32 ptos.) Decida sobre la convergencia de las siguientes series, aplicando los criterios vistos en clase, según sea el caso. Sea claro en sus justificaciones

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^7}}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$       d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} - 1}{e^n + 1}$

2. ( 10 ptos.) Halle el intervalo de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2x - 1)^n}{4^n}$ . Analice los extremos del intervalo por separado

3.

a) ( 4 ptos.) Escriba la representación en serie de potencias de la función  $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ .

b) ( 8 ptos.) Utilice la serie del punto anterior para hallar la serie de potencias que representa a la función  $g(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x}$ .

c) (8 ptos.) Utilice el resultado anterior para calcular el valor aproximado de  $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x} dx$  sumando los primeros tres términos de la serie que corresponde a la integral de  $\frac{\tan^{-1} x}{x}$  en el intervalo  $[0,1]$ .

4. ( 28 ptos.) Decida sobre el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) Si la serie  $\sum a_n$  es convergente, entonces la serie  $\sum \frac{1}{1 + a_n}$  es convergente.

b) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{6^n}$  es convergente y su suma es 6

c) la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{\text{sen}n}{n})$  es convergente, puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}n}{n} = 0$ .

d) La serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$  es convergente y su suma es  $\frac{3}{2}$

5. (10 ptos.) Considere los puntos  $P(2, -1)$  y  $Q(3, 4)$

a) Defina un vector perpendicular al vector  $\overrightarrow{PQ}$  cuya longitud sea de tres unidades

b) Si  $P$  y  $Q$  son los extremos de un diámetro de una esfera, halle la ecuación de la esfera, determinando su radio y su centro.