

Nombre: _____ Código : _____

1. (32 ptos.) Decida sobre la convergencia de las siguientes series, aplicando los criterios vistos en clase, según sea el caso. Sea claro en sus justificaciones

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^7}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} - 1}{e^n + 1}$

2. (10 ptos.) Halle el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2x - 1)^n}{4^n}$. Analice los extremos del intervalo por separado

3.

a) (4 ptos.) Escriba la representación en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{1 - x}$.

b) (8 ptos.) Utilice la serie del punto anterior para hallar la serie de potencias que representa a la función $g(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x}$.

c) (8 ptos.) Utilice el resultado anterior para calcular el valor aproximado de $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x} dx$ sumando los primeros tres términos de la serie que corresponde a la integral de $\frac{\tan^{-1} x}{x}$ en el intervalo $[0,1]$.

4. (28 ptos.) Decida sobre el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum \frac{1}{1 + a_n}$ es convergente.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{6^n}$ es convergente y su suma es 6

c) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{\text{sen}n}{n})$ es convergente, puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}n}{n} = 0$.

d) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ es convergente y su suma es $\frac{3}{2}$

5. (10 ptos.) Considere los puntos $P(2, -1)$ y $Q(3, 4)$

a) Defina un vector perpendicular al vector \overrightarrow{PQ} cuya longitud sea de tres unidades

b) Si P y Q son los extremos de un diámetro de una esfera, halle la ecuación de la esfera, determinando su radio y su centro.