

UNIVERSIDA ICESI
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SUPLETORIO DE ÁLGEBRA LINEAL

1. (12 puntos)

Dé condiciones sobre a tales que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 1 \\2x + 5y - z &= 3 \\x + (a+2)y + (a^2 - 1)z &= 2a\end{aligned}$$

- (i) No tenga solución,
- (ii) Tenga infinitas soluciones (dar la solución general),
- (iii) Tenga solución única (dar la solución).

2. (8 puntos)

Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$. ¿ A es invertible?

3. (30 puntos)

(a) Demuestre que si A es una matriz $m \times n$ y $AA^T = 0$ entonces $A = 0$.

(b) Demuestre que si A es una matriz $n \times n$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\det(cA) = c^n \det A$.

(c) Demuestre que toda matriz cuadrada se puede escribir como la suma de una matriz simétrica mas una antisimétrica.

(d) Demuestre que no existen matrices A y B , de 2×2 , tales que

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Determine todas las matrices de 2×2 , de la forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ tales que $A^2 = I_2$.