UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

Examen Final de Teoría de Probabilidades – 08131 período 111
Cali, 20 de mayo de 2011.

1. Un investigador de mercados, se encuentra desarrollando un estudio que compara el hábito de compra en familias caleñas con niños menores de 16 años, ubicadas en dos estratos socioeconómicos de la ciudad: Estrato 2 y Estrato 5. Una de las variables del estudio considera el número de hijos en la familia. Los datos obtenidos para esta variable son los siguientes:

E2	0	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	7	7	7	7	7	10
E5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	7

Con base en los datos obtenidos resuelva las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál de los dos estratos presenta una distribución simétrica? Justifique su respuesta.
b. Para el estrato que presenta distribución simétrica ¿Entre qué valores se encuentra el número de hijos para el 95% de las familias?
c. ¿Cuál es el número máximo de hijos para el 50% de las familias del estrato 2?
d. Si el investigador ha planeado ubicar una oferta especial (descuento del 30% en ropa infantil y juvenil) en un almacén de cadena para las familias que participaron en el estudio y que presentan mayor homogeneidad en el número de hijos, ¿cuál de los dos estratos podrían disfrutar de la oferta? Justifique

(20%)

2. Un fabricante produce paquetes de caramelo. Se utilizan dos máquinas para ello. Después de haberse completado la elaboración de un buen número de lotes, se descubre que una de las máquinas, que lleva a cabo el 40% de la producción total, tiene un defecto que ha conducido a la introducción de impurezas en el 10% de las unidades de caramelos que elabora. De un paquete de caramelos se extrae una unidad y se analiza.

a. Si se sabe que procede de la máquina defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga impurezas?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga impurezas y sea de la máquina defectuosa?
c. Si la unidad procede de la máquina defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que no presente impurezas?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha unidad no contenga impurezas?
e. Si no contiene impurezas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un paquete producido por la máquina defectuosa?

(20%)

3. Una máquina está programada para que sirva 6 onzas de refresco al presionar un botón. La probabilidad de que la máquina sirva más de 6 onzas de refresco al presionar el botón es de 0.10 y se comporta igual para cada solicitud. Si en una hora se sirven 8 vasos de refresco desde la misma máquina y se define la variable aleatoria X: número de vasos con más de 6 onzas de refresco, determine:

a. La función de probabilidad para la variable X, indique su fórmula.
b. La probabilidad de encontrar dos vasos con más de 6 onzas.
c. La probabilidad de encontrar más de 2 vasos con más de 6 onzas.
d. Si el costo de desperdicio se define mediante la fórmula: *Costo=0.0125X+0.020* en miles de pesos, donde X es el número de vasos con más de 6 onzas. Encuentre el costo promedio de desperdicio por hora.

(20%)

4. Sea X el tiempo (horas) durante el cual un libro de Estadística puesto en reserva en la biblioteca del ICESI durante dos horas es solicitado en préstamo por un estudiante. La función de densidad de X está dada por:

$$f(x)=\begin{cases} k(x+1) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \textit{en otro punto} \end{cases}$$

a. Halle el valor esperado de X e interprete su significado.
b. Halle la función de distribución acumulada F(x).
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de solicitud para prestar un libro de Estadística en la biblioteca del ICESI por un estudiante este entre 30 y 75 minutos?
d. Si el tiempo de solicitud para prestar un libro de Estadística es mayor de 30 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante cualquiera emplee un tiempo no menor de 75 minutos para prestar un libro de Estadística en la biblioteca del ICESI?

(20%)

5. El volumen de latas llenadas por otra máquina se distribuye en forma normal con media de 12.05 onzas y desviación estándar de 0.03 onzas.

a. ¿Qué porcentaje de latas tienen un volumen entre 12 y 12.07 onzas?
b. Entre cuáles valores simétricos alrededor de la media se encuentra el 85% de los contenidos de las latas

c. La media del proceso se puede ajustar utilizando calibración. ¿En qué valor debe fijarse la media para que 99% de las latas contengan 12 onzas o más, conservando la misma desviación?
d. Si se escoge al azar una muestra de 5 latas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellas contengan más de 12.08 onzas?
e. Si se escogen 90 latas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 20 contengan más de 12.08 onzas?

(20%)

FÓRMULAS DE INTERÉS

Coeficiente de Variación

$$CV = \frac{S}{\overline{X}}; S = \text{desviación estándar de la muestra}$$

Definición de probabilidad condicional

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición de probabilidad Total

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

$B_1, B_2, \ldots, B_k$: mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos

Independencia de eventos:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Teorema de Bayes:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_k)P(B_k)}$$

Combinación

$$nCx = \frac{n!}{(n-x)! * x!}$$

Distribución de probabilidad Binomial

$$P(x) = nCx * \pi^x * (1-\pi)^{n-x}$$

Distribución de probabilidad de Poisson

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^x}{x!}$$

Propiedades de las funciones para variables aleatorias continuas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad f(x): \text{función de densidad de probabilidad}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \text{función de distribución acumulada}$$

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

Valor esperado de X

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad f(x): \text{función de densidad de probabilidad}$$

Función de densidad Exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x > 0, \beta > 0 \text{ constante} \quad o \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \lambda = \frac{1}{\beta}$$

Fórmula de transformación para la distribución normal estándar

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Aproximación de la binomial mediante la normal:

$$Z = \frac{(X \pm 0.5) - n \times \pi}{\sqrt{n \times \pi \times (1-\pi)}}; \quad n \times \pi \ge 5 \ y \ n \times (1-\pi) \ge 5$$